Concours E3A
CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES 3 2001

PARTIE I

1a $L(f)$ est une primitive de la fonction continue f, il existe donc une constante C telle que pour tout $t \in [a,b]$: $L(f)(t) = \int_a^t f(u)\,du + C$.
La relation $\int_a^b L(f)(t)\,dt = 0$ permet de déterminer $C = -\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,du\right)\,dx$. Ce qui prouve que $L(f)$ est bien défini pour tout $f \in E_0$
De plus $\boxed{L(f)(t) = \int_a^t f(u)\,du - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,du\right)\,dx}$
toute primitive d'une fonction continue est C^1 donc est bien C^0 : f est une application de E_0 dans E_0 .
On montre facilement que $f \mapsto \int_a^t f(u)\,du - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,du\right)\,dx$ est une application linéaire par linéarité de l'intégrale.

$\boxed{\text{C'est un endomorphisme de } E_0.}$

1b Soit $f \in \ker L$, alors, $L(f) = 0$. En dérivant, on obtient $f = 0$.

$$\boxed{\ker L = \{0\}}$$

1c $L(f)$ est dérivable de dérivée f, donc $L(f)$ est de classe C^1:

$$\boxed{\mathrm{Im} L \subset E_1}$$

L'endomorphisme $f_{|E_1}$ n'est pas surjectif car les éléments de son image sont de classe C^2. La restriction de L à E_1n'est pas un automorphisme de E_1.
remarque on peut aussi donner un exemple de fonction d'intégrale non nulle sur $[a,b]$
2a On repart de la formule trouvée en 1°.(a):

$$\begin{aligned}
L(f)(t) &= \int_a^t f(u)\,du - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,du\right)\,dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^t f(u)\,du\right)\,dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,du\right)\,dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,du\right)\,dx
\end{aligned}$$

$$\boxed{L(f)(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,du\right)\,dx}$$

2b $L(f)$ est continue sur le segment $[a,b]$,donc l'image du segment $[a,b]$ est un segment f atteint son minimum en un point $x_i \in [a,b]$ et son maximum en un point $x_s \in [a,b]$. $\boxed{\text{Pour tout } t \in [a,b] \text{: } L(f)(x_i) \le L(f)(t) \le L(f)(x_s).}$
2c

$$\begin{aligned}
\int_a^b |x-t|\,dt &= \int_a^x (x-t)\,dt + \int_x^b (t-x)\,dt \\
&= x^2 - (a+b)x + \frac{a^2+b^2}{2}.
\end{aligned}$$

L'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^2 - (a+b)x + \frac{a^2+b^2}{2}$ permet de montrer que sa borne supérieure est $\frac{(b-a)^2}{2}$, donc $\boxed{\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |t-x|\,dt = \frac{(b-a)^2}{2}}$.

$$\begin{aligned}
|L(f)(t)| &= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,du\right)\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|\int_x^t f(u)\,du\right|\,dx \\
&\le \frac{\|f\|}{b-a}\int_a^b |x-t|\,dx \le \frac{b-a}{2}\|f\|
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\|L(f)\| \le \frac{b-a}{2}\|f\|}$

Soit alors $f \in E_0$ et (ϕ_n) une suite de E_0 de limite f_0 on a :

$$\|L(\phi_n) - L(f)\| = \|L(\phi_n - f)\| \leq \frac{b-a}{2}\|\phi_n - f\|$$

On a donc : $\lim_{n->\infty}(L(\phi_n)) = L(f)$ pour toute suite ϕ_n de limite f . Par le critère séquentielle de la limite f est continue en tout élément f de E_0 . $\boxed{L \text{ est continue sur } E_0}$
remarque : (linéaire ⇒continue) n'est vrai qu'en dimension finie.
2d $L(P_0)(t) = t + C$ avec $\int_a^b (t+C)\,dt = 0$ donc $L(P_0)(t) = t - \frac{a+b}{2}$ et $\|L(P_0)\| = \frac{b-a}{2}$
De la relation $\|L(f)\| \leq \frac{b-a}{2}\|f\|$, on déduit que pour $\|f\| \leq 1$ $\frac{b-a}{2}$ est un majorant de $\|L(f)\|$ et donc $|||L||| \leq \frac{b-a}{2}$.
De plus pour $f = P_0$ on a $\|P_0\| = 1$ et $\|L(P_0)\| = \frac{b-a}{2}$.$\frac{b-a}{2}$ est donc le plus grand élément de $\{\|L(f)\|, \|f\| = 1\}$
On a donc $\boxed{|||L||| = \frac{b-a}{2}}$

PARTIE II

1a $F_1 = \{f \in E_0, \quad \forall t \in [a,b] \quad f(a+b-t) = -f(t)\}$
$F_2 = \{f \in E_0, \quad \forall t \in [a,b] \quad f(a+b-t) = f(t)\}$
L'application $f_1 : t \mapsto \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^3$ est dans F_1 donc F_1 est non vide et non réduit à $\{0\}$.
L'application $f_2 : t \mapsto (t-a)(t-b)$ est dans F_2 donc F_2 est non vide et non réduit à $\{0\}$.
Interprétation géométrique : le graphe des fonctions de F_2 admet un axe de symétrie en $x = (a+b)/2$, celle de F_1 un centre de symétrie en $((a+b)/2, 0)$, d'où l'idée de prendre les primitives nulle en $(a+b)/2$ de f pour utiliser la symétrie.
1b On voit facilement que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E_0.
Soit $f \in F_1$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $L(f)(t) = \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u)\,du + C$ ($L(f)$primitive de f)
Alors, $L(f)(a+b-t) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-t} f(u)\,du + C$
$= -\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(a+b-v)\,dv + C$ (changement de variable $v = a+b-u$)
$= \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(v)\,dv + C$ (car $f \in F_1$)
donc, si $f \in F_1$, alors $L(f) \in F_2$ $\boxed{L(F_1) \subset F_2}$
Remarque : il ne peut pas y avoir égalité car $L(F_1)$ ne peut contenir que des fonctions C^1 , alors que F_2 contient des fonctions continues non dérivable (prendre un translation de la valeur absolue)
Soit $f \in F_2$
D'après la remarque de symétrie l'intégrale de f sur $[a,b]$ et la primitive admet un centre de symétrie : vérification par le calcul:
$\int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u)\,du\right) dt = \int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} f(u)\,du\right) dx$ (changement de variable $t = a+b-x$)
$= \int_a^b \left(-\int_{\frac{a+b}{2}}^x f(a+b-v)\,dv\right) dx$ (changement de variable $u = a+b-v$)
$= -\int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^x f(v)\,dv\right) dx$ (car $f \in F_2$)
On en déduit que si $f \in F_2$, alors, $\int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u)\,du\right) dt = 0$ et donc $L(f)(t) = \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u)\,du$.
On a alors
$L(f)(a+b-t) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-t} f(u)\,du$
$= -\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(a+b-v)\,dv$ (changement de variable $v = a+b-u$)
$= -\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(v)\,dv + C$ (car $f \in F_2$)
Si $f \in F_2$, alors $L(f) \in F_1$.
$\boxed{L(F_2) \subset F_1}$ ici aussi l'inclusion est stricte.
2a $\forall t \in [a,b]$, $g(a+b-t) = g(t)$ donc $g \in F_2$.
De la même façon, on définit la fonction h sur $[a,b]$ par $h(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(a+b-t)]$ et on vérifie que $h \in F_1$.
2b Soit $f \in E_0$, alors $f = h + g$ (notations du (a)) avec $h \in F_1$ et $g \in F_2$ donc $E_0 = F_1 + F_2$.
De plus $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ donc

$$\boxed{E_0 = F_1 \oplus F_2}$$

2c Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
$L^n(f)(b) - L^n(f)(a) = \int_a^b (L^n(f))'(t)\,dt$ (car $L^n(f)$est C^1)
$= \int_a^b L^{n-1}(f)(t)\,dt = 0$ (définition de L)
Donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 2 \; L^n(f)(b) = L^n(f)(a)}$$

3a $f \in F_2$, $L(F_1) \subset F_2$ et $L(F_2) \subset F_1$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $L^{2n-1}(f)$ est donc un élément de F_1.
On a alors $L^{2n-1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = -L^{2n-1}(f)\left(a+b-\frac{a+b}{2}\right) = -L^{2n-1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right)$
donc pour $\boxed{n \in \mathbb{N}^*\text{: } L^{2n-1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0}$

De la même façon,
$L^{2n+1}(f)(a) = -L^{2n+1}(f)(a+b-a) = -L^{2n+1}(f)(b)$ or, on sait que $L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b)$
donc pour $\boxed{n \in \mathbb{N}^*: L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b) = 0}$

$\int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t)\,dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(L^{2n+1}(f)\right)'(t)\,dt = L^{2n+1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) - L^{2n+1}(f)(a) = 0$. donc pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{\int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t)\,dt = 0}$

3b Toutes les variations dans cette question sont à comprendre au sens strict.
$(L(f))' = f$ et f est strictement positive. On en déduit que $\boxed{L(f) \text{ est croissante}}$. On sait aussi que $L(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$
$(L^2(f))' = L(f)$ donc $L^2(f)$ décroît sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et croit sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. De plus l'intégrale de la fonction continue $L^2(f)$ est nulle . Donc $L^2(f)$ change de signe . Enfin comme $L^2(f)(a) = L^2(f)(b)$ on déduit :

$$\begin{cases} L^2(f) \text{ décroit sur } \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ de } f(a) > 0 \text{àà } f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \\ L^2(f) \text{ croit sur } \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \text{ de } f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \text{àà } f(b) > 0 \end{cases}$$

On note c_1 et c_2 le racines de $L^2(f)$.
$(L^3(f))' = L^2(f)$, de plus $L^3(f)$ s'annule en a, b, et $\frac{a+b}{2}$. On en déduit les variations et le signe de $L^3(f)$.

$$\begin{cases} L^3(f) \text{ croit sur } [a, c_1] \text{ de } f(a) = 0 \text{àà } f(c_1) > 0 \\ L^3(f) \text{ décroit sur } \left[c_1, \frac{a+b}{2}\right] \text{ de } f(c_1) \text{àà } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \\ L^3(f) \text{ décroit sur } \left[\frac{a+b}{2}, c_2\right] \text{ de } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \text{àà } f(c_2) < 0 \\ L^3(f) \text{ croit sur } [c_2, b] \text{ de } f(c_2) \text{àà } f(b) = 0 \end{cases}$$

On passe de la même façon à $L^{(4)}(f)$ puis à $L^{(5)}(f)$ pour constater que $L^{(5)}$ à le même tableau de signe que $L^{(1)}$.
Les variations de $L^{(n)}(f)$ se vérifie alors par récurrence selon la valeur de n modulo 4.
On suppose que $L^{(4p)}$ a les variations et le signe de $L^{(4)}$ et on construit les tableaux de $L^{(4p+1)} \cdots L^{(4p+4)}$
(voir annexe manuscrite , je ne sais pas tracer un tableau de variation avec mon traitement de texte)
3c $\quad {}_n = \{t \in [a,b] | L^n(f)(t) = 0\}$
Des tableaux de variation de la question précédente, on déduit que:

pour n=1, lecardinalde ${}_1$ est 1
pour n pair ,le cardinal de ${}_n$ est 2
pour n $\geq$ 3 impair, le cardinal de ${}_n$ est 3.

3d De même:

pour $n = 1$, $L(f)(a) < 0$,
pour $n \geq 3$ impair, $L^n(f)(a) = 0$,
pour n congru à 2 modulo 4, $L^n(f)(a) > 0$,
pour n multiple de 4, $L^n(f)(a) < 0$

PARTIE III 1a

En utilisant à chaque fois que $P_{i+1}(x) = \int_a^x P_i(t)dt + C$ avec C tel que $\int_a^b P_{i+1} = 0$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} P_0(t) = 1 \\ P_1(t) = (t-a) - \frac{b-a}{2} \\ P_2(t) = \frac{(t-a)^2}{2} - \frac{(b-a)(t-a)}{2} + \frac{(b-a)^2}{12} \\ P_3(t) = \frac{(t-a)^3}{6} - \frac{(b-a)(t-a)^2}{4} + \frac{(b-a)^2(t-a)}{12} \end{array}}$$

1b Montrons l'égalité $P_n(X+b-a) - P_n(X) = (b-a)\frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, on a bien $P_1(X+b-a) - P_1(X) = (b-a)$
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $P_n(X+b-a) - P_n(X) = (b-a)\frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$.
La dérivée de P_{n+1} est P_n, donc le polynôme $P_{n+1}(X+b-a) - P_{n+1}(X) - (b-a)\frac{(X-a)^n}{n!}$ a pour dérivée $P_n(X+b-a) - P_n(X) - (b-a)\frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$, qui est nulle d'après l'hypothèse de récurrence.
De plus, sa valeur en a est $P_{n+1}(b) - P_{n+1}(a)$ qui est nulle d'après la question II 2°(c).
On en déduit que le polynôme $P_{n+1}(X+b-a) - P_{n+1}(X) - (b-a)\frac{(X-a)^n}{n!}$ est nul, d'où la relation à l'ordre $n+1$.
D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n(X+b-a) - P_n(X) = (b-a)\frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}}$.
Si vous rédigez avec des fonctions polynômes sur $[a,b]$ n'oubliez pas de dire que le segment est de cardinal infini pour revenir aux polynômes.
1c Dans la relation précédente, on pose $a = 0$, $b = 1$, $n = 3$ et $X = k$.
On obtient $P_3(k+1) - P_3(k) = \frac{k^2}{2}$
On somme alors pour k variant de 1 à n et on trouve $P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n k^2$.
Or $P_3(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}$ d'où finalement:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

2a $\varphi(P,Q)=\frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)Q(t)\,dt$
φ est une application de $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$.
On vérifie facilement que φ est bilinéaire et symétrique.
Pour tout $P\in\mathcal{P}$, $\varphi(P,P)\geq 0$ et si $\varphi(P,P)=0$, alors l'intégrale de la fonction continue positive P^2 est nulle donc $P=0$ et φ est définie positive.

$$\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire de } \mathcal{P}}$$

2b Intégrons $\varphi(P_n,P_m)$ par parties:
$\frac{1}{b-a}\int_a^b P_n(t)P_m(t)\,dt=\frac{1}{b-a}\left([P_n(t)P_{m+1}(t)]_a^b-\int_a^b P_{n-1}(t)P_{m+1}(t)\,dt\right)$ avec $u=P_m, v=P_{m+1}$ fonctions C^1 sur $[a,b]$
or, on sait d'après II 2°.(c) que pour $k\geq 2$, $P_k(a)=P_k(b)$ donc pour $m\geq n\geq 2$, on a
$\varphi(P_n,P_m)=-\varphi(P_{n-1},P_{m+1})$.
On montre alors par récurrence que
$\varphi(P_n,P_m)=(-1)^{n+1}\varphi(P_{m+n-1},P_1)=\frac{(-1)^{n+1}}{b-a}\int_a^b P_{m+n-1}(t)P_1(t)\,dt$
Puis $\frac{(-1)^{n+1}}{b-a}\int_a^b P_{m+n-1}(t)P_1(t)\,dt$
$=\frac{(-1)^{n+1}}{b-a}\left([P_{m+n}(t)P_1(t)]_a^b-\int_a^b P_{m+n}(t)\,dt\right)$ (on intègre par parties: $u_1, v=P_{m+n}$, fonction $\in C^1([a,b])$)
$=\frac{(-1)^{n+1}}{b-a}(P_{m+n}(b)P_1(b)-P_{m+n}(a)P_1(a))$ (car $\int_a^b P_{m+n}(t)\,dt=0$ par définition de L)
$=\frac{(-1)^{n+1}}{b-a}(P_{m+n}(a)(b-a))$ (car $P_{m+n}(a)=P_{m+n}(b)$ et $P_1(b)-P_1(a)=b-a$)
On obtient bien pour $\boxed{m\geq n>0\ \varphi(P_n,P_m)=(-1)^{n+1}P_{m+n}(a)}$
$\varphi(P_n,P_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b P_n(t)\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b L(P_{n-1})(t)\,dt=0$ d'après la définition de L.
2c $P_n(a)=L^n(P_0)(a)$ et P_0 est un élément de F_2 tel que pour tout $t\in[a,b]$, $P_0(t)>0$. En utilisant le résultat trouvé en II 3°.(d), on montre que
$\boxed{P_n(a)=0 \text{ si et seulement si } n \text{ est impair et différent de } 1.}$
3a Pour tout entier n, le polynôme P_n est de degré n, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une base de $\mathcal{P}$.
On en déduit que les espaces $FP_1=\text{Vect}\{P_n, n\in 2\,\mathbb{N}+1\}$ et $FP_2=\text{Vect}\{P_n, n\in 2\,\mathbb{N}\}$ sont deux espaces supplémentaires: $\mathcal{P}=FP_1\oplus FP_2$.
On peut aussi repartir de $E=F_1\oplus F_2$.
3b Si n est un entier pair et si m est un entier impair, montrons que $\varphi(P_n,P_m)=0$.
Si $n=0$, c'est vrai (III 2)(b).
Si $0<n\leq m$, $\varphi(P_n,P_m)=(-1)^{n+1}P_{m+n}(a)=0$. (d'après III 2) (b) et III 2) (c)
$\boxed{\text{La somme directe } FP_1\oplus FP_2 \text{ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire } \varphi.}$
4a Montrons par récurrence que $P_n(t)=\sum_{k=0}^n\gamma_k\frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(b-a)^k}{k!}$
Pour $n=0$ la formule est vraie.
Supposons que $P_n(t)=\sum_{k=0}^n\gamma_k\frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(b-a)^k}{k!}$
P_{n+1} est une primitive de P_n donc
$P_{n+1}(t)=\int_a^t P_n(u)\,du+P_{n+1}(a)=\int_a^t P_n(u)\,du+\gamma_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$
$=\sum_{k=0}^n\gamma_k\frac{(t-a)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}\frac{b-a)^k}{k!}+\gamma_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$
$=\sum_{k=0}^{n+1}\gamma_k\frac{(t-a)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}\frac{(b-a)^k}{k!}$
On obtient la relation à l'ordre $n+1$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\ \mathbb{N}$, $\boxed{P_n(t)=\sum_{k=0}^n\gamma_k\frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(b-a)^k}{k!}}$
On pose ensuite $t=b$: $P_n(b)=\sum_{k=0}^n\gamma_k\frac{(b-a)^n}{(n-k)!k!}=\frac{(b-a)^n}{n!}\sum_{k=0}^n C_n^k\gamma_k$
Or pour $n\geq 2$, $P_n(b)=P_n(a)=\frac{(b-a)^n}{n!}\gamma_n$
On en déduit la relation demandée pour $n\geq 2$: $\boxed{\gamma_n=\sum_{k=0}^n C_n^k\gamma_k}$
On peut alors déterminer une formule de récurrence permettant de calculer les γ_n:

$$\boxed{\gamma_0=1 \text{ et pour } n\geq 2,\ \gamma_{n-1}=\frac{-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}C_n^k\gamma_k}$$

On en déduit que γ_n est indépendant de a et b.
4b $\gamma_1=\frac{-1}{2}$; $\gamma_2=\frac{1}{6}$; $\gamma_3=\ 0$; $\gamma_4=\frac{-1}{30}$; $\gamma_6=\frac{1}{42}$; $\gamma_8=\frac{-1}{30}$; $\gamma_{10}=\frac{5}{66}$;
4c On utilise le procédé d'orthogonalisation de Schmidt en calculant les produits scalaires avec les relations de la question III 2°.(b). $\varphi(P_n,P_0)=0$ et pour $m\geq n>0$, $\varphi(P_n,P_m)=(-1)^{n+1}P_{m+n}(a)=(-1)^{n+1}\frac{(b-a)^{m+n}}{(m+n)!}\gamma_{m+n}$
On obtient comme base $\varphi-$orthogonale du sous espace G de FP_2 engendré par la famille (P_0,P_2,P_4,P_6):
$(P_0,P_2,P_4+(b-a)^2\frac{P_2}{42},P_6+(b-a)^2\frac{P_4}{33}+(b-a)^4\frac{P_2}{7920}$