

Concours National Commun - Session 2010

Corrigé de l'épreuve de mathématiques II Filière MP

Pour toute matrice complexe A , il existe une matrice unitaire U telle que les éléments diagonaux de la matrice UAU^{-1} soient tous égaux.

Corrigé par M.TARQI¹

I. UN PEU DE GÉOMÉTRIE

1.1 **Question de cours :** L'équation d'une ellipse dans une repère orthonormé du plan euclidien est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$ de foyer $F(c = \sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, de directrice d'équation $x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a} < 1$. Pour des raisons de symétrie, il existe un autre couple de foyer et directrice. Ce sont $F'(-c, 0)$ et la droite D' d'équation $x = \frac{-a^2}{c}$.

1.2

1.2.1 On a $\lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta} = (\lambda + \mu) \cos \theta + i(\lambda - \mu) \sin \theta$, donc $(x, y) \in E_{\lambda, \mu}$ si et seulement si $x = (\lambda + \mu) \cos \theta$ et $y = (\lambda - \mu) \sin \theta$, donc $\frac{x^2}{(\lambda + \mu)^2} + \frac{y^2}{(\lambda - \mu)^2} = 1$, ainsi (x, y) décrit l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{(\lambda + \mu)^2} + \frac{y^2}{(\lambda - \mu)^2} = 1$.

1.2.2 $r_{\omega, \varphi}$ est une rotation affine ; de centre w et d'angle φ .

1.2.3 Prenons $w = 0$ et $\varphi = \frac{\varepsilon + \tau}{2}$. Alors

$$r_{0, \varphi}(\lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta}) = \lambda e^{i\varepsilon} e^{i(\theta + \frac{\tau - \varepsilon}{2})} + \mu e^{i\tau} e^{-i(\theta + \frac{\tau - \varepsilon}{2})} = b e^{i(\theta + \frac{\tau - \varepsilon}{2})} + c e^{-i(\theta + \frac{\tau - \varepsilon}{2})},$$

donc $r_{0, \varphi}(\lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta}) \in E_{b, c}$.

D'autre part, si $bz + cz' = b e^{i\theta} + c e^{-\theta} \in E_{b, c}$, alors

$$b e^{i\theta} + c e^{-i\theta} = r_{0, \varphi} \left(\lambda e^{i(\theta - \frac{\tau - \varepsilon}{2})} + \mu e^{-i(\theta - \frac{\tau - \varepsilon}{2})} \right).$$

Donc $E_{b, c} = r_{0, \varphi}(E_{\lambda, \mu})$, et comme $r_{0, \varphi}$ est une rotation, donc une isométrie, et que se fait autour de 0, alors $E_{b, c}$ est une ellipse centrée à l'origine.

1.3

1.3.1 \mathbb{C} est considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R} . Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$f(z + \alpha z') = b(z + \alpha z') + c(\overline{z + \alpha z'}) = bz + c\overline{z} + \alpha(bz + c\overline{z}) = f(z) + \alpha f(z')$$

Donc f est bien linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

Soit $z = x + iy$ tel que $f(z) = 0$, posons $b = \alpha + i\beta$ et $c = \alpha' + i\beta'$, alors

$$\begin{cases} (\alpha + \alpha')x + (\beta' - \beta)y = 0 \\ (\beta + \beta')x + (\alpha - \alpha')y = 0 \end{cases},$$

ystème qui est inversible puisque son déterminant $(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha'^2 + \beta'^2) = |b|^2 - |c|^2$ est non nul, donc $x + iy = z = 0$, ainsi f est injective.

¹M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc. E-mail : medtarqi@yahoo.fr

- 1.3.2 Soit $C = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ le cercle unité, alors $f(C) = \{bz + c\bar{z}/|z| = 1\} = E_{b,c}$ est une ellipse de centre O (d'après la question [1.2.3]).
- 1.3.3 Comme f est non injective et non nulle, alors $\text{Im}f$ est une droite vectorielle (droite affine passant par O).
 D'autre par, C est un compact de \mathbb{C} (fermé et borné), et f est continue (linéaire) donc $\text{Im}f$ est une partie compacte de la droite affine, donc c'est un segment.
 Si $z \in C$, alors $-z \in C$, donc $f(C)$ est symétrique par rapport à O.
 On a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|bz + c\bar{z}| \leq |b| + |c| = 2|b|$, donc $|e^{i\varepsilon}e^{i\theta} + e^{i\tau}e^{-i\theta}| \leq 2$, et $|e^{i\varepsilon}e^{i\frac{\tau-\varepsilon}{2}} + e^{i\tau}e^{-i\frac{\tau-\varepsilon}{2}}| = |2e^{\frac{\varepsilon+\tau}{2}}| = 2$, donc les deux extrémités du segment $f(C)$ sont les points d'affixes $z_1 = e^{i(\frac{\varepsilon+\tau}{2})}$ et $z_2 = e^{i(\frac{\varepsilon+\tau}{2}+\pi)}$.
- 1.3.4 • Si f est injective alors $f(C) = E_{b,c}$. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, alors il existe un réel ξ tel que $\xi a \in E_{b,c}$ et par conséquent, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) = \xi a$, donc $\frac{bz_0 + c\bar{z}_0}{a} = \xi \in \mathbb{R}$.
- Si f est non injective, alors il existe $z_1 \in \mathbb{C}^*$ tel $f(z_1) = 0$, donc si on considère $z_0 = \frac{z_1}{|z_1|}$ alors $|z_0| = 1$ et pour tout nombre complexe non nul a , on a $\frac{bz_0 + c\bar{z}_0}{a} = 0$ est un réel.

II. MATRICES UNITAIRES

2.1 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ vérifie $A^*A = AA^* = I_2$, donc elle est unitaire.

2.2 Par définition si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$ (S_n désigne l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$). Ainsi $\det A^* = \overline{\det A}$ et si de plus A est unitaire, alors $A^*A = I_n$, et par conséquent

$$\det(A^*A) = \det A \overline{\det A} = 1,$$

donc $|\det A| = 1$.

2.3 Il est clair que si u et v sont des complexes tels que $|u|^2 + |v|^2 = 1$, alors $A = \begin{pmatrix} u & v \\ -\lambda\bar{v} & \lambda\bar{u} \end{pmatrix}$ est unitaire.

Inversement, Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un matrice unitaire, alors $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$ et $c\bar{a} + d\bar{b} = 0$. et $|ad - bc| = 1$.

Supposons $ad - bc = 1$ (même raisonnement si $ad - bc = -1$)

• Si $a \neq 0$, on déduit $c = -\frac{\bar{b}d}{a}$, puis $1 = ad - bc = ad + \frac{b\bar{b}d}{a} = (|a|^2 + |b|^2)\frac{d}{a}$ donc $d = \bar{a}$,
 et $c = -\frac{\bar{b}\bar{a}}{\bar{a}} = -\bar{b}$.

• Si $a = 0$, on obtient $|b| = 1, \bar{b}d = 0, d = 0$, puis $|c| = 1, bc = -1$, donc $c = -\frac{1}{b} = -\bar{b}$.

2.4 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est unitaire si et seulement si $D^*D = \text{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = I_n$, donc si et seulement si $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_n| = 1$.

2.5

2.5.1 Si A est une matrice à coefficients réels, alors $A^* = {}^t A$, donc A est unitaire si et seulement si ${}^t A A = A {}^t A = I_n$, c'est-à-dire A est orthogonale.

2.5.2 Soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Notons A_σ la matrice de permutation associée à σ . Alors

$$A_\sigma = (\sigma_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Posons $({}^t A_\sigma) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on obtient :

Pour tout (i, j) de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{ji} \\ &= \delta_{j\sigma(i)} \\ &= \delta_{\sigma^{-1}\sigma j i, \sigma(i)} \\ &= \delta_{\sigma^{-1}(j') i'} \end{aligned}$$

Donc ${}^t A_\sigma = A_{\sigma^{-1}}$

Soient maintenant σ et $\sigma' \in S_n$, on pose $A_\sigma A_{\sigma'} = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on obtient donc

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^n \delta_{i\sigma(k)} \delta_{k\sigma'(j)} \\ &= \delta_{i\sigma\sigma'(j)} \delta_{\sigma'(i)\sigma'(j)} \\ &= \delta_{i\sigma\sigma'(j)} \end{aligned}$$

Alors $A_\sigma A_{\sigma'} = A_{\sigma\sigma'}$ et en particulier on a :

$$A_\sigma A_{\sigma^{-1}} = A_{\sigma\sigma^{-1}} = A_{id} = I_n$$

Donc A_σ est inversible et $(A_\sigma)^{-1} = A_{\sigma^{-1}} = {}^t A_\sigma$ c'est-à-dire A_σ est orthogonale, donc elle est unitaire.

2.6 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note b_{ij} les coefficients de AA^* , alors

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \overline{a_{kj}}$$

Donc A est unitaire si et seulement si $\sum_{k=1}^n a_{ik} \overline{a_{kj}} = \delta_{ij}$ (δ_{ij} étant le symbole de Kroneker), c'est-à-dire si et seulement si les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.7 Il est clair que toute matrice unitaire A est inversible et $A^{-1} = A^*$, donc $\mathbb{U}_n \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. D'autre par $I_n \in \mathbb{U}(n)$ et si A et B sont $\mathbb{U}(n)$, alors

$$(AB^{-1})^*(AB) = (B^{-1})^* A^* AB^{-1} = (B^{-1})^* B^{-1} = (BB^*)^{-1} = I_n,$$

donc $AB^{-1} \in \mathbb{U}(n)$.

2.8 Compacité de $\mathbb{U}(n)$

2.8.1 Notons $l : A \mapsto ({}^t \overline{A}, A)$, $b : (A, B) \mapsto AB$ et $\varphi : A \mapsto A^*A$. l et b sont des applications continues (l est linéaire et b est bilinéaire) et comme $\varphi = b \circ l$, alors φ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lui même.

2.8.2 Par identification de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et \mathbb{C}^{2n} , l'application $\|\cdot\|_2$ n'est autre que la norme associée au produit scalaire canonique de \mathbb{C}^{2n} .

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est unitaire alors $A^*A = I_n$ et donc pour tout $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 = 1.$$

Ainsi

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}.$$

2.8.3 On a $\mathbb{U}_n = f^{-1}\{I\}$ et comme f est continue et $\{I_n\}$ est fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors \mathbb{U}_n est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'autre part, \mathbb{U}_n est borné, car pour tout $A \in \mathbb{U}(n)$, $\|A\|_2 = \sqrt{n}$, et comme on est en dimension finie \mathbb{U}_n est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III. DÉMONSTRATION D'UN RÉSULTAT ANNONCÉ

3.1 Étude en dimension 2

3.1.1 Il est clair que

$$U^*U = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{pmatrix} = I_2, \text{ puisque } |u|^2 + |v|^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \text{ donc } U \text{ est unitaire.}$$

3.1.2 Nous avons

$$\begin{aligned} UAU^* &= \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ua_1 + vc)\bar{u} + (ub + va_2)\bar{v} & -v(ua_1 + vc) + u(ub + va_2) \\ (-\bar{v}a_1 + \bar{u}c)\bar{u} + (-\bar{v}b + \bar{u}a_2)\bar{v} & (-\bar{v}a_1 + \bar{u}c)\bar{u} + (-\bar{v}b + \bar{u}a_2)u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} A_1 &= (ua_1 + vc)\bar{u} + (ub + va_2)\bar{v} \\ &= a_1 \cos^2 \alpha + a_2 \sin^2 \alpha + (ce^{i(\beta-\gamma)} + be^{-i(\beta-\gamma)}) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_2 &= (-\bar{v}a_1 + \bar{u}c)\bar{u} + (-\bar{v}b + \bar{u}a_2)u \\ &= a_1 \sin^2 \alpha + a_2 \cos^2 \alpha + (be^{i(\beta-\gamma)} + ce^{-i(\beta-\gamma)}) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

3.1.3

3.1.3.1 D'après la question [1.3.4] de la première partie, il existe z_0 de module 1 tel que $\frac{bz_0 + c\bar{z}_0}{a_1 - a_2}$ soit un réel, et comme $|z_0| = 1$, alors on peut choisir β et γ tel que $z_0 = e^{i(\beta-\gamma)}$. Donc il existe un couple $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que p soit un réel.

3.1.3.2 Soit p un réel, l'application définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$\varphi : \alpha \mapsto \cos^2 \alpha + p \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2}$$

est continue et comme $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2}$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} = \cos^2 \alpha + p \cos \alpha \sin \alpha$.

3.1.3.3 Dans ces conditions, on a :

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 \cos^2 \alpha + a_2 \sin^2 \alpha + (ce^{i(\beta-\gamma)} + be^{-i(\beta-\gamma)}) \sin \alpha \cos \alpha \\ &= a_1(\cos^2 \alpha + p \cos \alpha \sin \alpha) + a_2(1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha + p \cos \alpha \sin \alpha \\ &= ta_1 + (1-t)a_2 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} A_2 &= a_1 \sin^2 \alpha + a_2 \cos^2 \alpha + (be^{i(\beta-\gamma)} + ce^{-i(\beta-\gamma)}) \sin \alpha \cos \alpha \\ &= ta_2 + (1-t)a_1 \end{aligned}$$

Ainsi pour $t = \frac{1}{2}$, on a $A_1 = A_2$, c'est-à-dire les éléments diagonaux UAU^* sont égaux.

3.2 Étude du cas général

3.2.1 Comme f est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même , alors f est continue.

3.2.2

3.2.2.1 L'application g_A est continue comme composée des applications continues :

– l'application continue $H \mapsto HAH^*$; puisque on a l'inégalité :

$$\begin{aligned} \|HAH^* - H_0AH_0^*\|_\infty &= \|HA(H^* - H_0^*) + (H - H_0)AH_0^*\|_\infty \\ &\leq \|H\|_\infty \|A\|_\infty \|H^* - H_0^*\|_\infty + \|A\|_\infty \|H_0^*\|_\infty \|H - H_0\|_\infty \end{aligned}$$

– l'application linéaire f ;

– l'application norme $\|\cdot\|_\infty$ qui est continue, car elle est lipshitzienne.

3.2.2.2 g_A étant continue sur le compact $\mathbb{U}(n)$, donc elle est bornée et atteint ses bornes, en particulier il existe $H_0 \in \mathbb{U}(n)$ tel que $g_A(H_0) = \inf\{g_A(H)/H \in \mathbb{U}(n)\}$.

3.2.3

3.2.3.1 Puisque $g_A(H_0) > 0$, alors $i_0 \neq j_0$. Soit σ la permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ définie par $\sigma(i_0) = 1, \sigma(j_0) = 2$ et pour tout $k \neq i_0$ et $k \neq j_0, \sigma(k) = k$. Notons $P = A_\sigma$, alors $PA \in \mathbb{U}(n)$ (car $\mathbb{U}(n)$ est un groupe) et

$$\|f((PH)A(PH)^*)\|_\infty = \|f(HAH^*)\|_\infty,$$

donc la supposition est possible.

3.2.3.2 C'est une conséquence de la question [3.1] de cette partie.

3.2.3.3 Comme U_0 est unitaire, alors on a :

$$UU^* = \begin{pmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^* & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0U_0^* & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = I_n.$$

D'autre part, si on pose $A' = \begin{pmatrix} B & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}$ on a :

$$UA'U^* = \begin{pmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & B_1 \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0^* & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0BU_0^* & * \\ * & B_3 \end{pmatrix} = I_n.$$

Donc $(UA'U^*)_{1,1} = (UA'U^*)_{2,2} = \frac{a'_{11} + a'_{22}}{2}$ et pour tout $i = 3, 4, \dots, n, (UA'U^*)_{i,i} = a'_{i,i}$. $(UA'U^*)_{i,j}$ désigne le coefficient de la i -ème ligne et j -ème colonne de la matrice $UA'U^*$.

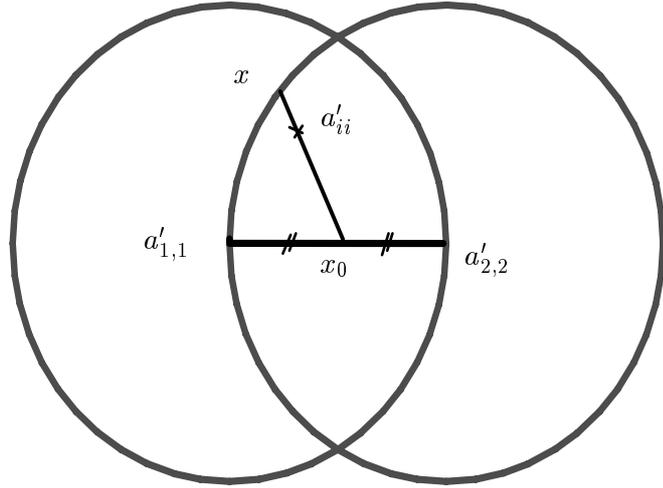
3.2.3.4 Nous avons

$$\|f(UA'U^*)\|_\infty = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |(UA'U^*)_{ii} - (UA'U^*)_{jj}| = \sup \{|x_0 - a'_{ii}|, |a'_{ii} - a'_{jj}|/i, j, \geq 3\}.$$

et puisque pour tout (i, j) , on a $\|a'_{ii} - a'_{jj}\| \leq \|f(A')\|_\infty$, alors en particulier $\|a'_{11} - a'_{ii}\| \leq |a'_{11} - a'_{22}|$ et $\|a'_{22} - a'_{ii}\| \leq |a'_{11} - a'_{22}|$, donc $|x_0 - a'_{ii}| \leq |a'_{11} - a'_{22}|$ et par conséquent :

$$\|f(UA'U^*)\|_\infty \leq \|f(A')\|_\infty.$$

On a, pour tout $i = 3, 4, \dots, n, |a'_{i,i} - a'_{1,1}| \leq |a'_{11} - a'_{22}|$ et $|a'_{i,i} - a'_{2,2}| \leq |a'_{11} - a'_{22}|$, donc les $a'_{i,i}$ appartiennent à l'intersection des cercles centrés en $a'_{1,1}$ et $a'_{2,2}$ et de même rayon $|a'_{11} - a'_{22}|$.



D'après la figure, on voit bien que pour tout $i \in \{3, 4, \dots, n\}$:

$$|x_0 - a'_{ii}| \leq |x_0 - x| < |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$$

3.2.3.5 Notons

$$E = \{(i, j) \in [3, n]^2 / |a'_{i,i} - a'_{j,j}| = |a'_{1,1} - a'_{2,2}|\}.$$

On suit le même raisonnement qu'on a fait dans la question [3.2.3.4], mais cette fois pour chaque couple (i, j) de E , et quitte à permuter les lignes et les colonnes on peut supposer $j = i + 1$. Donc il existe une matrice unitaire U_i telle que les éléments diagonaux de $U_i U A' U^* U_i^* = (U_i U) A' (U_i U)^*$ sont

$$x_0, x_0, a'_{3,3}, \dots, \frac{a'_{i,i} + a'_{i+1,i+1}}{2}, \frac{a'_{i,i} + a'_{i+1,i+1}}{2}, a'_{i+2,i+2}, \dots, a'_{n,n},$$

avec

$$\|f((U_i U) A' (U_i U)^*)\|_\infty \leq \|f(A')\|_\infty.$$

et

$$\left| \frac{a'_{i,i} + a'_{i+1,i+1}}{2} - a'_{j,j} \right| < |a'_{i,i} - a'_{i+1,i+1}| = |a'_{1,1} - a'_{2,2}|.$$

On peut poursuivre ce raisonnement pour tout les couples (i, j) de E , en dernière étape on obtient une matrice H , produit de matrices unitaires, telle que

$$\|f(H A' H^*)\|_\infty < \|f(A')\|_\infty.$$

L'inégalité précédente est en contradiction avec la définition de A' , donc l'hypothèse $g_A(H_0) > 0$ est fausse.

3.2.4 D'après ce qui précède on a nécessairement $g_A(H_0) = \|f(H_0 A H_0^*)\| = 0$, donc $f(H_0 A H_0^*) = 0$ et par conséquent, pour tout couple (i, j) , $(H_0 A H_0^*)_{i,i} = (H_0 A H_0^*)_{j,j}$, c'est-à-dire les éléments diagonaux de $H_0 A H_0^*$ sont tous égaux.

•••••