Concours National Commun - Session 2002

Corrigé de l'épreuve de mathématiques I
Filière MP

Quelques propriétés des fonctions presque-périodiques

Corrigé par M.TARQI

I. Valeur moyenne d'une fonction

1. ***Valeur moyenne d'une fonction périodique***

   (a) Nous avons $\displaystyle\int_{-A}^{A} \cos t dt = [-\sin t]_{-A}^{A} = -2\sin A$, d'où $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} \cos t dt = 0$ et donc $\mu(C_1) = 0$.
   De même $\mu(S_2) = 0$ et $\displaystyle\mu(C_0) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} dt = 1$.

   (b) En utilisant la relation de Chasles, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'égalité

   $$u_n = \frac{1}{n}\int_0^{n\omega} f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\omega}^{(k+1)\omega} f(t)dt$$

   et par le changement de variable $t = u + k\omega$, on obtient :

   $$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\omega} f(u+k\omega)du = \int_0^{\omega} f(u)du,$$

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_n = \int_0^{\omega} f(t)du$.

   (c) Soit A un réel strictement positif, notons $n = E(\frac{A}{\omega})$, donc $n\omega \leq A < (n+1)\omega$. ($E(x)$ désigne la partie entière de x). D'autre part :

   $$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} f(t)dt &= \int_{-A}^{-n\omega} f(t)dt + \int_{-n\omega}^{n\omega} f(t)dt + \int_{n\omega}^{A} f(t)dt \\ &= \int_{-A}^{-n\omega} f(t)dt + 2n\int_0^{\omega} f(t)dt + \int_{n\omega}^{A} f(t)dt\end{aligned}$$

   f étant continue sur $\mathbb{R}$ et ω-périodique, donc il est bornée sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq M$, avec $\displaystyle M = \sup_{t\in[0,\omega]} |f(t)|$, donc :

   $$\left|\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)dt\right| = \left|\frac{1}{2A}\int_{-A}^{-n\omega} f(t)dt + \left(\frac{n}{A} - \frac{1}{\omega}\right)\int_0^{\omega} f(t)dt + \frac{1}{2A}\int_{n\omega}^{A} f(t)dt\right|.$$

   Or

   $$\left|\frac{1}{2A}\int_{-A}^{-n\omega} f(t)dt\right| \leq \frac{M(A-n\omega)}{2A} \leq \frac{M\omega}{2A},$$

   et

   $$\left|\frac{1}{2A}\int_{n\omega}^{A} f(t)dt\right| \leq \frac{M(A-n\omega)}{2A} \leq \frac{M\omega}{2A},$$

   et comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{n}{A} - \frac{1}{\omega}\right) = 0$, car $\displaystyle\left|\frac{n\omega - A}{A\omega}\right| \leq \frac{1}{A}$, donc f admet une valeur moyenne et

   $$\mu(f) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f(t)dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(t)dt.$$

2. ***Transformations***

   (a) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) / \mu(f) \text{ existe}\}$. Il est clair que la fonction nulle est un élément de E, et si f et g sont dans E, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

   $$\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}(f+\lambda g)(t)dt = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f(t)dt + \frac{\lambda}{2A}\int_{-A}^{A} g(t)dt,$$

   donc $f+\lambda g$ admet une valeur moyenne, c'est-à-dire $f+\lambda g \in E$ et $\mu(f+\lambda g) = \mu(f)+\lambda\mu(g)$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et l'application μ est une forme linéaire sur E.

   (b) Soient $a \in \mathbb{R}$ fixé et $A > 0$, alors

   $$\begin{aligned}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\tau_a f(t)dt &= \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f(t+a)dt = \frac{1}{2A}\int_{-a-A}^{-a+A} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2A}\int_{-a-A}^{-A} f(t)dt + \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f(t)dt + \frac{1}{2A}\int_{A}^{-a+A} f(t)dt.\end{aligned}$$

   Mais

   $$\left|\frac{1}{2A}\int_{-a-A}^{-A} f(t)dt\right| \le \frac{M|a|}{2A}$$

   et

   $$\left|\frac{1}{2A}\int_{A}^{-a+A} f(t)dt\right| \le \frac{M|a|}{2A},$$

   avec $M = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$, donc $\tau_a(f)$ admet une valeur moyenne et $\mu(\tau_a(f)) = \mu(f)$.

   (c) Soit $A > 0$, alors pour tout $a \neq 0$, on a :

   $$\frac{1}{2A}\int_{A}^{A} f(at)dt = \frac{1}{2aA}\int_{-aA}^{aA} f(t)dt = \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} f(t)dt$$

   Avec $B = aA$, donc si $a > 0$ $\mathcal{N}_a(f)$ admet une valeur moyenne et $\mu(\mathcal{N}_a(f)) = \mu(f)$.
   De même , si $a < 0$

   $$\frac{1}{2A}\int_{A}^{A} f(at)dt = \frac{1}{2(-a)A}\int_{aA}^{-aA} f(t)dt = \frac{1}{2B}\int_{-B}^{B} f(t)dt$$

   Avec $B = -aA$, donc dans ce cas aussi $\mathcal{N}_a(f)$ admet une valeur moyenne et $\mu(\mathcal{N}_a(f)) = \mu(f)$.
   Si $a = 0$, $\mu(N_0(f)) = \mu(f) = f(0)$.

   (d) Si f est une fonction impaire, alors pour tout $A > 0$, $\displaystyle\int_{-A}^{A} f(t)dt = 0$ et donc $\mu(f) = 0$.

   (e) Pour une fonction paire, on a, pour tout $A > 0$, $\displaystyle\int_{-A}^{A} f(t)dt = 2\int_{0}^{A} f(t)dt$, et par conséquent $\mu(f) = \displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A}\int_{0}^{A} f(t)dt$.

3. ***Valeur moyenne d'une fonction convergente***

   (a) Soit $A > 0$, comme g est paire, alors :

   $$\int_{-A}^{A} g(t)dt = 2\int_{0}^{A}\frac{dt}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^A = \ln(1+A),$$

   donc $\mu(g) = \displaystyle\lim_{A\to\infty}\frac{\ln(1+A)}{A} = 0$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, alors il existe $A_0 > 0$ tel que $\forall A \geq A_0$, $|f(t)| \leq \varepsilon$. Soit maintenant $A \geq A_0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2A}\left|\int_{-A}^{A} f(t)dt\right| &\leq \frac{1}{2A}\int_{-A}^{-A_0} |f(t)|dt + \frac{1}{2A}\left|\int_{-A_0}^{A_0} f(t)dt\right| + \frac{1}{2A}\int_{A_0}^{A} |f(t)|\, dt \\ &\leq \frac{A-A_0}{A}\varepsilon + \frac{1}{2A}\left|\int_{-A_0}^{A_0} f(t)dt\right| \end{aligned}$$

Donc $\mu(f)$ existe et vaut 0.

(c) La fonction $g = f - l$ vérifie la condition de la question précédente, et donc $\mu(g) = \mu(f) - l = 0$, c'est-à-dire $\mu(f) = l$.

(d) On a $f = \varphi + \phi$ avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$ et $\phi(t) = \dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$. La fonction φ est paire de limite $\frac{l_- + l_+}{2}$ en $+\infty$ et ϕ est impaire, donc

$$\mu(f) = \mu(\varphi+\phi) = \frac{l_- + l_+}{2}.$$

4. ***Valeur moyenne d'une fonction intégrable***

Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(t)dt$ existe et finie, et par conséquent $\mu(f)$ existe et $\mu(f) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f(t)dt = 0$.

5. ***Valeur moyenne et fonctions bornées***

(a) Notons $f(t) = \sqrt{|t|}\cos t$. La suite $(2n\pi)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ et la suite $(f(2n\pi))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, donc f ne peut pas être bornée sur $\mathbb{R}$.
Soit $A > 0$,

$$\frac{1}{A}\int_{-A}^{A} f(t)dt = 2\int_{0}^{A} f(t)dt = \frac{1}{A}[\sqrt{t}\sin t]_0^A - \frac{1}{A}\int_0^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt = \frac{\sin A}{\sqrt{A}} - \frac{1}{A}\int_0^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$$

On a $\lim_{A\to+\infty} \dfrac{\sin A}{\sqrt{A}} = 0$, puisque $\left|\dfrac{\sin A}{\sqrt{A}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ et l'inégalité

$$\frac{1}{A}\left|\int_0^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt\right| \leq \frac{1}{A}\int_0^A \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

montre que $\lim_{A\to+\infty} \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt = 0$. Donc f admet une valeur moyenne et $\mu(f) = 0$.

(b) Soit n un entier naturel non nul, alors on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{3^{2n}} \chi(t)dt &= \sum_{p=0}^{n-1}\int_{3^{2p}}^{3^{2p+1}} \chi(t)dt = \sum_{p=0}^{n-1}(3^{2p+1} - 3^{2p}) \\ &= 2\sum_{p=0}^{n-1} 3^{2p} = \frac{1}{4}(3^{2n} - 1). \end{aligned}$$

et donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^{2n}}\displaystyle\int_0^{3^{2n}} \chi(t)dt = \frac{1}{4}$.
De même

$$\begin{aligned} \int_0^{3^{2n+1}} \chi(t)dt &= \int_0^{3^{2n}} \chi(t)dt + \int_{3^{2n}}^{3^{2n+1}} \chi(t)dt \\ &= \frac{1}{4}(3^{2n} - 1) + (3^{2n+1} - 3^{2n}) \\ &= 3^{2n+1} - \frac{3}{4}3^{2n}, \end{aligned}$$

et donc $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{2n+1}} \int_0^{3^{2n+1}} \chi(t)dt = \frac{3}{4}$. Donc χ n'a pas de valeur moyenne.

II. Un produit scalaire

1. ***Exemples***

   (a) Nous avons $C_\alpha C_\beta = \frac{1}{2}(C_{\alpha-\beta} + C_{\alpha+\beta})$, d'où :

   - Si $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$, alors $(C_\alpha|C_\beta) = \mu(C_\alpha C_\beta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$
   - Si $\alpha = \beta = 0$, $(C_\alpha|C_\beta) = 1$.

   (b) $(S_\alpha|S_\beta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$ et $(C_\alpha|S_\beta) = 0$

2. ***Sommes finies de fonctions périodiques***

   (a) Supposons qu'il existe $T > 0$ tel que $h(t) = h(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors en particulier $2 = h(0) = h(T) = \cos T + \cos(\pi T)$, donc nécessairement $\cos T = \cos(\pi T) = 1$ et par suite il existe des entiers relatifs k et k' tel que $T = 2k\pi$ et $\pi T = 2k'\pi$, ceci est absurde puisque $\pi \notin \mathbb{Q}$.

   (b) $h = C_1 + C_\pi$, donc $h \in \mathcal{F}$.

   Puisque $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left|2^{-n}\cos(3^n t)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, alors la fonction $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\cos(3^n t)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont de classes $\mathcal{C}^\infty$, en particulier ils sont dérivables sur $\mathbb{R}$. On va montrer que f n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$, ce qui permet de conclure que $f \notin \mathcal{F}$. En effet, supposons que f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

   $$\forall t \in \left]\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha\right[, \quad l - \varepsilon \leq \frac{f(t)}{t - \frac{\pi}{2}} \leq l + \varepsilon,$$

   donc

   $$\forall t \in \left]\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha\right[, \quad l - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\frac{\cos(3^k t)}{t - \frac{\pi}{2}} \leq l + \varepsilon.$$

   Donc il existe un entier naturel n_0 tel que

   $$\forall t \in \left]\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} + \alpha\right[, \forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\frac{\cos(3^k t)}{t - \frac{\pi}{2}} \leq l + \varepsilon,$$

   et comme $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(3^k t\right)}{t - \frac{\pi}{2}} = -3^n \sin\left(3^n \frac{\pi}{2}\right) = -3^n$, alors quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$, on obtient l'inégalité

   $$\forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon \leq -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq l + \varepsilon,$$

   inégalité qui montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ est convergente, ce qui est absurde. En conclusion, la fonction $f \notin \mathcal{F}$

   (c) Il est clair que l'application $(f,g) \longmapsto (f|g)$ est une forme bilinéaire symétrique et positive (propriétés de l'intégrale). Soit maintenant $f = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i C_{\omega_i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j S_{\eta_j}$

un élément de $\mathcal{F}$ tel que $\mu(f^2) = 0$, où les α_i, β_i sont non nuls.
Mais
$$\mu(f^2) = \alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\alpha_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}\beta_j^2,$$
donc $\alpha_i = \beta_j = 0$ pour tout i et j, donc f est la fonction nulle. D'où le résultat.

3. ***Continuité***
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $A > 0$,
$$\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} f_n^2(t)dt \leq \|f_n\|_\infty^2,$$
donc
$$\mu(f_n^2) \leq \|f_n\|_\infty^2,$$
et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n|f_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n^2) = 0$.
En utilisant l'inégalité de Caucyh-Schwarz $|(f_n|g)| \leq \sqrt{(f_n|f_n)}\sqrt{(g|g)}$, en déduit que si $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n|f_n) = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n|g) = 0$.

4. ***Limites uniformes***
(a) Les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $(\mathcal{F}, \|.\|_\infty)$; soit $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq M$ et $\|g_n\|_\infty \leq M$.
D'autre part, les deux suites sont de Cauchy dans $(\mathcal{F}, \|.\|_\infty)$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$, on a :
$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \text{ et } \|g_n - g_m\|_\infty \leq \varepsilon$$
Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(f_n|g_n) - (f_m|g_m) = (f_n - f_m|g_n) + (f_m|g_n - g_m)$$
Donc pour tout $n, m \geq n_0$, on a
$$\begin{array}{rcl} |(f_n|g_n) - (f_m|g_m)| & \leq & \|f_n - f_m\|_\infty\|g_n\|_\infty + \|f_m\|_\infty\|g_n - g_m\|_\infty \\ & \leq & 2M\varepsilon. \end{array}$$
Donc la suite $(f_n|g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |.|)$, donc elle est convergente et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n|g_n)$ existe.
(b) Théorème de Weirstrass : Soit f une fonction numérique et ω-périodique sur $\mathbb{R}$. Alors quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$ donné, il existe un polynôme trigonométrique $P_\varepsilon = a_0 + \sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{\omega}x + b_k \sin\frac{2\pi}{\omega}x\right)$ vérifiant $|f(x) - P_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. ***Une extension de*** $(.|.)$
(a) D'après ce qui précède (Théorème de Weirstrass et la question 4.(a)) $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n|g_n)$ existe. Maintenant soient $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'autres suites qui convergent uniformément vers f et g respectivement, alors les suites $(f_n - h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n - k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers 0, et donc l'inégalité
$$\begin{array}{rcl} |(f_n|g_n) - (h_n|k_n)| & = & |(f_n - h_n|g_n) + (h_n|g_n - k_n)| \\ & \leq & \|f_n - h_n\|_\infty\|g_n\|_\infty + \|g_n - k_n\|_\infty\|h_n\|_\infty \end{array}$$
montre que $\lim\limits_{n\to\infty}[(f_n|g_n) - (h_n|k_n)] = 0$, car $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées pour la norme $\|.\|_\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n|g_n)$ ne depend pas du choix des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, autrement dit l'application $(f, g) \longmapsto (f|g)$ est bien définie dans l'ensemble des fonctions continues périodiques.

(b) Il est clair que l'application $(f, g) \longmapsto (f|g)$ est symétrique et positive ou nulle. Soient f, g, h des suites continues périodiques sur $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons des suites d'éléments de $\mathcal{F}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui convergent uniformément vers f, g et h respectivement, alors $(f + \lambda g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f + \lambda g$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(f_n + \lambda g_n|h_n) = (f_n|h_n) + \lambda(g_n|h_n),$$

d'où, par passage à la limite, $(f + \lambda g|h) = (f|h) + \lambda(g|h)$.

(c) D'après la question $I.1.(b)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_n|f_n) = \mu(f_n^2) = \dfrac{1}{w}\displaystyle\int_0^{\omega} f_n^2$. D'autre part, l'inégalité

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ |f_n^2(t) - f^2(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty(\|f_n\|_\infty + \|f\|_\infty)$$

montre que la suite $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $\mathbb{R}$, car $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|.\|_\infty$, et donc

$$(f|f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{w}\int_0^{\omega} f_n^2(t)dt = \frac{1}{w}\int_0^{\omega} \lim_{n\to\infty} f_n^2(t)dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f^2(t)dt.$$

(d) Soit f une fonction continue et w-périodique tel que $(f|f) = 0$, alors d'après la question précédente $\displaystyle\int_0^{w} f^2(t)dt = 0$ et donc $f = 0$ sur $[0, w]$ et comme elle est périodique, f est nulle sur $\mathbb{R}$.

6. ***Groupe des périodes d'une fonction***

(a)
- Si $\alpha > 0$, il résulte de la caractérisation de la borne supérieure qu'il existe $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha \leq x \leq \alpha + \frac{\alpha}{2} < 2\alpha$. Si $\alpha < x$, alors il existe $b \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha \leq b < x < 2\alpha$.
  Donc, si on pose $y = x - b$, alors $y \in G$ et $0 < y < 2\alpha - b < \alpha$, et ceci contredit la définition de α et par suite, $\alpha = x \in G$, et donc $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.
  Soit $x \in G$; posons $n = E(\frac{x}{\alpha})$, on a : $n\alpha \leq x < (n + 1)\alpha$ et donc $0 \leq x - n\alpha < \alpha$. Puisque $x - n\alpha \in G$ et $\alpha = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$, alors $x - n\alpha = 0$, c'est-à-dire $x = n\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$. Ceci montre que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
- Si $\alpha = 0$, montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $]a, b[\subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$, montrons que $]a, b[\cap G \neq \emptyset$. puisque $b - a > 0$, alors il existe $x \in G$ tel que $0 < x < b - a$.
  Posons $n = E(\frac{a}{x})$, on a $nx \leq a < (n + 1)x$, donc

  $$0 < (n + 1)x - a = (nx - a) + x < x < b - a$$

  et par conséquent $a < (n+1)x < b$. Comme $(n+1)x \in G$, alors $(n+1)x \in]a, b[\cap G$. On en déduit que $]a, b[\cap G \neq \emptyset$, c'est-à-dire G est dense dans $\mathbb{R}$.

(b)
- $0 \in G_f$ et si w et w' sont périodes de f, alors $w - w'$ est une période de f. Donc G_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
- Soit $w = \inf G_f \cap \mathbb{R}_+^*$
  – Si $w > 0$, alors $w = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$ où $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de G_f. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

  $$f(t + w) = f(t + \lim_{n\to\infty} w_n) = \lim_{n\to\infty} f(t + w_n) = \lim_{n\to\infty} f(t) = f(t),$$

  ainsi f est w-périodique.

– Si $w=0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$, et donc pour tout $t\in\mathbb{R}$, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G_f telle que $t=\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.
Donc pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$f(t)=f(\lim_{n\to\infty} w_n)=\lim_{n\to\infty} f(w_n)=\lim_{n\to\infty} f(0)=f(0),$$

ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$.

7. ***Théorème de mélange***

(a) Soit $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ tel que $\frac{w}{\eta}=r$, donc $qw=r\eta$ et par conséquent pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f(t)=f(t+qw)$ et $g(t)=g(t+p\eta)=g(t+qw)$. Donc $\tau=qw=p\eta$ est une période commune de f et g.
Maintenant soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions τ-périodiques, qui convergent uniformément vers f et g respectivement, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$(f_n|g_n)=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f_n(t)g_n(t)dt,$$

et par conséquent (la suite $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg sur $\mathbb{R}$.)

$$(f|g)=\lim_{n\to\infty}(f_n|g_n)=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)g(t)dt.$$

(b) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{F}$ qui convergent uniformément vers f et g respectivement.
Posons

$$f_n(x)=a_0(n)+\sum_{k=1}^{\varphi(n)}\left(a_k(n)\cos\frac{2\pi k}{\omega}x+b_k(n)\sin\frac{2\pi k}{\omega}x\right)$$

et

$$g_n(x)=c_0(n)+\sum_{k=1}^{\phi(n)}\left(c_k(n)\cos\frac{2\pi k}{\eta}x+d_k(n)\sin\frac{2\pi k}{\eta}x\right).$$

On a $\mu(f_n)=a_0(n)$ et $\mu(f_n)=c_0(n)$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
f_n(x)g_n(x) &= a_0(n)c_0(n)+a_0(n)\sum_{k=1}^{\phi(n)}\left(c_k(n)\cos\frac{2\pi k}{\eta}x+d_k(n)\sin\frac{2\pi k}{\eta}x\right)\\
&+ c_0(n)\sum_{k=1}^{\varphi(n)}\left(a_k(n)\cos\frac{2\pi k}{\omega}x+b_k(n)\sin\frac{2\pi k}{\omega}x\right)\\
&+ \sum_{k=1}^{\phi(n)}\sum_{l=1}^{\varphi(n)}[a_k(n)c_l(n)\cos\frac{2\pi k}{\omega}x\cos\frac{2\pi l}{\eta}x+a_k(n)d_l(n)\cos\frac{2\pi k}{\omega}x\sin\frac{2\pi l}{\eta}x\\
&+ b_k(n)c_l(n)\sin\frac{2\pi k}{\omega}x\cos\frac{2\pi l}{\eta}x+b_k(n)d_l(n)\sin\frac{2\pi k}{\omega}x\sin\frac{2\pi l}{\eta}x]
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\omega}{\eta}\notin\mathbb{Q}$, alors $(f_n|g_n)=a_0(n)c_0(n)=\mu(f_n)\mu(g_n)$, donc

$$(f|g)=\lim_{n\to\infty}(f_n|g_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(f_n)\mu(g_n)=\mu(f)\mu(g).$$

III. Une algèbre de fonctions presque-périodiques

1. (a) Soit $f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos(w_n t) + \beta_n \sin(w_n t))$ un élément de $\mathcal{A}$. Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\alpha_n \cos(w_n t) + \beta_n \sin(w_n t)| \le |\alpha_n| + |\beta_n|$, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n \cos(x_n t) + \beta_n \sin(w_n t))$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. D'autre les fonctions $t \longmapsto \alpha_n \cos(x_n t) + \beta_n \sin(w_n t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et par conséquent $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Soient $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n \cos(w_n t) + \beta_n \sin(w_n t))$ et $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(\gamma_n \cos(\eta_n t) + \delta_n \sin(\eta_n t))$ deux éléments de A et λ un nombre réel. Alors

$$(f + \lambda g)(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n \cos(w_n t) + \lambda\gamma_n \cos(\eta_n t) + \beta_n \sin(w_n t) + \lambda\delta_n \sin(\eta_n t))$$

cette somme s'écrit sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(\varphi_n t) + b_n \sin(\varphi_n t)$ avec

$$\begin{cases} a_{2n} = \alpha_n, \\ a_{2n+1} = \lambda\gamma_n. \end{cases}, \quad \begin{cases} b_{2n} = \beta_n, \\ b_{2n+1} = \lambda\delta_n. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_{2n} = w_n, \\ \varphi_{2n+1} = \eta_n. \end{cases}$$

On vérifie aussi que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des familles sommables et quitte à regrouper les termes ayant la même fréquence, on peut supposer que les φ_n sont distincts deux à deux. Ainsi on a montré que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

(b) Soient $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n \cos(w_n t) + \beta_n \sin(w_n t))$ et $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(\gamma_n \cos(\eta_n t) + \delta_n \sin(\eta_n t))$ deux éléments de $\mathcal{A}$. Les deux séries définissant f et g sont absolument convergentes, donc leur produit (produit de Cauchy) $f(t)g(t)$ existe et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t)$$

où

$$W_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(\alpha_k \cos(w_k t) + \beta_k \sin(w_k t))(\gamma_{n-k} \cos(\eta_{n-k} t) + \delta_{n-k} \sin(\eta_{n-k} t))$$

Mais

$$
\begin{aligned}
W_n &= \sum_{k=0}^{n}(\alpha_k C_{w_k}+\beta_k S_{w_k})(\gamma_{n-k}C_{\eta_{n-k}}+\delta_{n-k}S_{\eta_{n-k}})\\
&= \sum_{k=0}^{n}[\alpha_k\gamma_{n-k}C_{w_k}C_{\eta_{n-k}}+\alpha_k\delta_{n-k}C_{w_k}S_{\eta_{n-k}}\\
&\qquad +\beta_k\gamma_{n-k}S_{w_k}C_{\eta_{n-k}}+\beta_k\delta_{n-k}S_{w_k}S_{\eta_{n-k}}]\\
&= \sum_{k=0}^{n}[\frac{\alpha_k\gamma_{n-k}}{2}C_{w_k+\eta_{n-k}}+\frac{\alpha_k\gamma_{n-k}}{2}C_{w_k-\eta_{n-k}}\\
&\qquad +\frac{\alpha_k\delta_{n-k}}{2}S_{w_k+\eta_{n-k}}-\frac{\alpha_k\delta_{n-k}}{2}S_{w_k-\eta_{n-k}}\\
&\qquad +\frac{\beta_k\gamma_{n-k}}{2}S_{w_k+\eta_{n-k}}+\frac{\beta_k\gamma_{n-k}}{2}S_{w_k-\eta_{n-k}}\\
&\qquad +\frac{\beta_k\delta_{n-k}}{2}C_{w_k-\eta_{n-k}}-\frac{\beta_k\delta_{n-k}}{2}C_{w_k+\eta_{n-k}}]\\
&= \sum_{k=0}^{n}[(\frac{\alpha_k\gamma_{n-k}}{2}-\frac{\beta_k\delta_{n-k}}{2})C_{w_k+\eta_{n-k}}+(\frac{\alpha_k\gamma_{n-k}}{2}+\frac{\beta_k\delta_{n-k}}{2})C_{w_k-\eta_{n-k}}\\
&\qquad +(\frac{\alpha_k\delta_{n-k}}{2}+\frac{\beta_k\gamma_{n-k}}{2})S_{w_k+\eta_{n-k}}+(\frac{\beta_k\gamma_{n-k}}{2}-\frac{\alpha_k\delta_{n-k}}{2})S_{w_k-\eta_{n-k}}
\end{aligned}
$$

Les familles $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k\gamma_{n-k}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k\delta_{n-k}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta_k\gamma_{n-k}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\beta_k\delta_{n-k}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont semmables, donc en regroupant les termes ayant la même fréquence, on obtient un élément de $\mathcal{A}$, ainsi $fg\in\mathcal{A}$.

2. (a) Tout élément f de $\mathcal{A}$ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, donc on peut prolonger le produit scalaire de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{A}$, en posant :

$$(f|g)=\lim_{n\to\infty}(f_n|g_n)$$

avec $f=\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(\alpha_n C_{w_n}+\beta S_{w_n})$ et $g=\lim_{n\to\infty}g_n=\lim_{k\to n}\sum_{k=0}^{n}(\gamma_n C_{\eta_n}+\delta_n S_{\eta_n})$

Soit $f=\lim_{n\to\infty}(\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_n C_{w_n}+\beta_n S_{w_n}))$ avec $w_n\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Donc $(f_n|f_n)=\alpha_0^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)$, d'où

$$(f|f)=\alpha_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$$

(b) Soit $f=\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(\alpha_n C_{w_n}+\beta S_{w_n})$ un élément de $\mathcal{A}$, alors

$$(f|C_{-w})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k(C_{w_k}|C_{-w})+\beta(S_{w_k}|C_{-w})$$

D'où

- $(f|C_{-w})=0$ si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|w|\neq|w_n|$,
- si'il existe n tel que $|w_n|=|w|$, $(f|C_{-w})=\begin{cases}\alpha_n, & \text{si } w=0,\\ \dfrac{\alpha_n}{2}, & \text{si } w\neq 0.\end{cases}$

De même si $w=0$, $(f|S_0)=0$ et si $w\neq 0$,

- $(f|S_{-w})=0$ si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|w|\neq|w_n|$,
- si'il existe n tel que $|w_n|=|w|$, $(f|S_{-w})=\begin{cases}\dfrac{\alpha_n}{2}, & \text{si } w=-w_n,\\ \dfrac{-\alpha_n}{2}, & \text{si } w=w_n.\end{cases}$

(c) Soient $f=\alpha_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_n C_{w_n}+\beta_n S_{w_n})$ et $g=\gamma_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\gamma_n C_{w_n}+\delta_n S_{w_n})$ deux éléments de $\mathcal{A}$, alors on peut vérifie que

$$(f|g)=\alpha_0\gamma_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\gamma_n+\beta_n\delta_n).$$

IV. LA FONCTION $\cos x+\cos(x\sqrt{2})$

1. **Près de $\sqrt{2}$**

   (a) Pour $n=0$, $p_0=1$ et $q_0=0$, supposons la propriété est vraie pour n et montrons la pour $n+1$.
   On a :
   $$(3+2\sqrt{2})^{n+1}=(3+2\sqrt{2})(p_n+q_n\sqrt{2})=p_{n+1}+q_{n+1}\sqrt{2},$$
   avec $p_{n+1}=3p_n+4q_n$ et $q_{n+1}=2p_n+3q_n$, donc la propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   (b) De même on peut montrer que $(3-2\sqrt{2})^n=p_n-q_n\sqrt{2}$ avec p_n et q_n sont des entiers naturels.

   (c) Nous avons
   $$p_n=\frac{1}{2}((3+2\sqrt{n})^n+(3-2\sqrt{n})^n)\quad\text{et}\quad q_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}((3+2\sqrt{n})^n-(3-2\sqrt{n}))^n,$$
   donc
   $$p_n\simeq\frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})^n \text{ et } q_n\simeq\frac{1}{2\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})^n.$$
   La relation
   $$(3+2\sqrt{2})^n=\frac{1}{(3-2\sqrt{2})^n}=p_n+q_n\sqrt{2},$$
   montre que $p_n^2-2q_n^2=1$.

2. **Approximation rationnelle de $\sqrt{2}$**
   Les deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l'infini, donc on peut les supposer non nulles à partir d'un certain rang n_0. Donc pour tout entier naturel $n\geq n_0$, on a :
   $$\left|p_n-q_n\sqrt{2}\right|=\frac{1}{p_n+\sqrt{2}q_n}\leq\frac{1}{q_n\sqrt{2}}$$
   et donc
   $$\left|\frac{p_n}{q_n}-\sqrt{2}\right|\leq\frac{1}{q_n^2\sqrt{2}}\leq\frac{1}{q_n^2}.$$
   On prend par exemple $p=p_{n_0}$ et $q=q_{n_0}$.

3. **Maxima de B**
   Posons $G=\{2k\pi\sqrt{2}-2k'\pi/(k,k')\in\mathbb{Z}^2\}$. Il est clair que G est un sous-groupe non trivial de $(\mathbb{R},+)$, donc $G=\alpha\mathbb{Z}$ ($\alpha>0$) ou bien G est dense dans $\mathbb{R}$.
   Supposons $G=\alpha\mathbb{Z}$, alors, puisque $2\pi\sqrt{2}\in\alpha\mathbb{Z}$, $2\pi\sqrt{2}=n\alpha$, de même $2\pi=m\alpha$, donc

$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, et ceci est absurde. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$ et par conséquent il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G de limite nulle, ainsi si on pose $x_n = 2k_n\pi\sqrt{2} - 2k'_n\pi$, alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, on a :

$$|2k_n\pi\sqrt{2} - 2k'_n\pi| \leq \varepsilon$$

La suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$, ne peut pas être bornée, car sinon $(k'{}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera borné et dans ce cas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prendra un nombre fini de valeurs et ceci est absurde car $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. On remarque aussi que, pour chaque n, k_n et k'_n sont de même signe, donc en remplaçant le couple (k_n, k'_n) par le couple $(-k_n, -k'_n)$, on peut supposer $k_n > 0$ et $k'_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Finalement on peut prendre par exemple $k = k_{n_0}$ et $k' = k'_{n_0}$.
On a :

$$\cos(2k_n\pi) = 1 + \cos(2k_n\pi\sqrt{2}) = 1 + \cos(2k_n\pi\sqrt{2} - 2k'_n\pi) = 1 + \cos(x_n),$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} B(2k_n\pi) = 2$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $B(2k_n\pi) \geq 2-\varepsilon$, et comme $\{2k_n\pi/n \in \mathbb{N}\}$ est infini, alors B prend une infinité de fois des valeurs supérieures à $2 - \varepsilon$.

4. **Presque périodicité-la définition de** BOHR
Soient $\varepsilon > 0$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\left|\dfrac{p}{q} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{q^2\sqrt{2}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} |B(x) - B(x + 2p\pi)| &= \left|\cos(x\sqrt{2}) - \cos(x\sqrt{2} + 2p\pi\sqrt{2})\right| \\ &= \left|\cos(x\sqrt{2}) - \cos(x\sqrt{2} + 2(p - q\sqrt{2})\pi\sqrt{2})\right| \\ &\leq 2\pi\sqrt{2}\left|p - q\sqrt{2}\right| \leq \frac{2\pi}{q}, \end{aligned}$$

car la fonction $\cos$ est 1-lipschitizienne

• • • • • • • • • • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr