Quelques propriétés des racines de P'_n.

1. Par le théorème de Rolle P'_n admet au moins une racine dans $]k, k+1[$ (pour k entre 0 et $n-1$). Comme P'_n est de degré n, il en admet exactement une qui est d'ailleurs simple. $\square$

2. On a clairement $P_n(X) = X^{n+1} - \dfrac{n(n+1)}{2}X^n + \dots$ de sorte que $P'_n(X) = (n+1)X^n - \dfrac{n^2(n+1)}{2}X^{n-1} + \dots$.
Donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = \dfrac{n^2}{2}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_{n,k} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} k = \dfrac{n}{2}$. $\square$

3. On a $P_n(n-X) = (-1)^{n+1}P_n(X)$ donc $P'_n(n-X) = (-1)^n P'n(X)$ et en particulier $P'_n(n - x_{n,k}) = 0$.
Or $n - x_{n,k} \in]n-k-1, n-k[$ de sorte que $n - x_{n,k} = x_{n,n-k-1}$ d'après la question 1.
Ainsi $x_{n,k}$ et $x_{n,n-k-1}$ sont symétriques par rapport à $n/2$. $\square$

4. $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k} = x_{n,k} - k + x_{n,n-k-1} - (n-k-1) = 1$.
Donc $\alpha_{n,k}$ et $\alpha_{n,n-k-1}$ sont symétriques par rapport à $1/2$. $\square$

6. Comme les racines de P'_n sont toutes simples, P'_n change de signe à chaque franchissement d'un $x_{n,k}$.
Si n est impair, P'_n est négatif sur $]-\infty, x_{n,0}[$ et si n est pair il est positif. Comme $P_n(0) = 0$ et que $0 < x_{n,0}$ on a $P_n(x_{n,0})$ du signe de $(-1)^n$.
Puis le sens de variation de P_n change sur $]x_{n,0}, x_{n,1}[$. Or $x_{n,0} < 1 < x_{n,1}$ et $P_n(1) = 0$ donc $P_n(x_{n,1})$ est du signe contraire à $P_n(x_{n,0})$ soit du signe de $(-1)^{n-1}$.
Par itération claire, $(-1)^{n-k}P_n(x_{n,k}) > 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. $\square$

7. De $P_n(X) = (X-n)P_{n-1}(X)$ on tire $P'_n(X) = P_{n-1}(X) + (X-n)P'_{n-1}(X)$ donc en particulier :
$P'_n(x_{n-1,k}) = P_{n-1}(x_{n-1,k})$ d'où, en vertu de la question 6, $(-1)^{n-k}P'_n(x_{n-1,k}) < 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$. $\square$

8. Convenons de noter $x_{n,-1} = -\infty$ et $x_{n,n} = +\infty$.
On a $x_{n,k-1} < k < x_{n,k} < k+1 < x_{n,k+1}$ et $k < x_{n-1,k} < k+1$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$.
Donc $x_{n-1,k} \in]x_{n,k_1}, x_{n,k}]$ ou $x_{n-1,k} \in [x_{n,k}, x_{n,k+1}[$.
Or compte tenu de la démonstration de la question 6, on a $(-1)^{n-k}P'_n(x) < 0$ sur $]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$.
La question 7 prouve alors que $x_{n-1,k} > x_{n,k}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-2$. $\square$

9. De $P_n(X) = XP_{n-1}(X-1)$ on tire $P'_n(X) = P_{n-1}(X-1) + XP'_{n-1}(X-1)$ donc $P'_n(1 + x_{n-1,k-1}) = P_{n-1}(x_{n-1,k-1})$.
Il résulte alors de la question 6 que $(-1)^{n-k}P'_n(1 + x_{n-1,k-1}) > 0$ pour $k = 1, 2, \dots, n-1$. $\square$

10 Un raisonnement analogue à celui de la question 8 prouve alors que $1 + x_{n-1,k-1} < x_{n,k}$. $\square$

11 D'après la question 8, on a $\alpha_{n,k} < \alpha_{n-1,k}$.
D'après la question 10, on a $\alpha_{n-1,k-1} < \alpha_{n,k}$ et donc (par décalage d'indice) $\alpha_{n-1,k} < \alpha_{n,k+1}$.
Ainsi $\alpha_{n,k} < \alpha_{n,k+1}$. $\square$

Un développement asymptotique.

12 $\mathcal{E} =]0, +\infty[$ (classique question de cours). $\square$

13 Pour $x \in \mathcal{E}$ la fonction h_x est positive sur $]0, +\infty[$, continue et strictement positive en 1 par exemple. $\square$

14 Par la formule de Leibniz Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et deux fois dérivale sous le signe intégral (classique question de cours). $\square$

15 Par intégration par parties sur $[\varepsilon, , A]$ suivie d'un passage à la limite : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. $\square$

16 On a $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t \; e^{-t}t^{x-1} \, \mathrm{d}\, t = \left(\ln t\sqrt{e^{-t}t^{x-1}} \mid \sqrt{e^{-t}t^{x-1}}\right)$ dans l'espace préhilbertien réel $\mathcal{L}^2]0, +\infty[$ (ces deux fonctions sont bien de carré intégrable). L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit alors :
$\Gamma'(x)^2 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln^2 t \; e^{-t}t^{x-1} \, \mathrm{d}\, t \times \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} \, \mathrm{d}\, t = \Gamma''(x)\Gamma(x)$.
En outre l'inégalité est stricte puisque les deux fonctions intervenant dans le produit scalaire ci-dessus ne sont pas proportionnelles. Ainsi la fonction ψ est stricetemnt croissante. $\square$

17 Immédiate conséquence de la question 15. $\square$

18 $\phi(n+1) - \phi(n) = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n^2}$ d'où la conclusion. $\square$

19 Il en découle que la suite $\big(\phi(n)\big)$ converge dans $\mathbb{R}$ puisque la série télescopique associée converge. $\square$

20 Soit $x > 0$ et $n = [x]$. D'après la question 16, il vient $\psi(n) \leqslant \psi(x) < \psi(n+1)$ et $-\ln(n+1) < -\ln x \leqslant -\ln n$ donc $\psi(n) - \ln(n+1) < \phi(x) < \psi(n+1) - \ln n$ i.e. $\phi(n) - \ln(1+\frac{1}{n}) < \psi(x) < \phi(n+1) + \ln(1+\frac{1}{n})$.
Lorsque $x \to +\infty$, $n = [x]$ en fait de même, donc, par le principe des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x)$ existe et vaut C. $\square$

21 Si $C \neq 0$ on a $\phi(t) \sim C$. Le théorème d'intégration de la relation d'équivalence dans le cas d'intégrales divergentes pour des fonctions de signe fixe au voisinage de $+\infty$, montre qu'alors $\displaystyle\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}\,t \sim Cx$. $\square$

22 Il vient $\displaystyle\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_1^x \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} - \ln t \ \mathrm{d}\,t = \ln\Gamma(x) - x\ln x + x - 1$ (car Γ est strictement positive et $\Gamma(1) = 1$).
En particulier pour $x = n \in \mathbb{N}^*$ il vient $\displaystyle\int_1^n \phi(t)\,\mathrm{d}\,t = \ln\big((n-1)!\big) - n\ln n + n - 1 = \ln\frac{(n-1)!.e^n}{e.n^n} = \ln\frac{n!.e^n}{e.n^{n+1}}$.
D'après la formule de Stirling, $\displaystyle\frac{n!.e^n}{e.n^{n+1}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{e\sqrt{n}}$.
Comme les logarithmes de deux infiniment petits équivalents sont équivalents, il vient $\displaystyle\int_1^n \phi(t)\,\mathrm{d}\,t \sim -\frac{1}{2}\ln n$.
Ce qui prouve que $C = 0$ sinon on aurait $\displaystyle\int_1^n \phi(t)\,\mathrm{d}\,t \sim Cn$ d'après la question précédente. $\square$

23 D'après la question 17, on a $\displaystyle\psi(x+m+1) = \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j} + \psi(x)$.
Par ailleurs $\displaystyle\psi(x+m+1) = \phi(x+m+1) + \ln(x+m+1) = \ln m + \phi(x+m+1) + \ln\frac{m+x+1}{m}$.
Or, pour x fixé, lorsque $m \to +\infty$, $\displaystyle\phi(x+m+1) + \ln\frac{m+x+1}{m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ (question précédente).
Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\psi(x) = \ln m - \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j} + \varepsilon_m$ avec $\lim\limits_{m\to+\infty}\varepsilon_m = 0$. $\square$

Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$.

24 $\displaystyle\frac{P_n'(X)}{P_n(X)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{X-i}$ et $P_n'(x_{n,k}) = P_n'(k+\alpha_{n,k}) = 0$ pour tout entier k entre 0 et n . Donc :
$\displaystyle 0 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\alpha_{n,k}+k-i} = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+k-i} + \sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{\alpha_{n,k}+k-i} = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+j} + \sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{1}{\alpha_{n,k}-1-j}$ $\square$

25 Notons $k = [nt]$.
Comme $t \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} k = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-k-1) = +\infty$ (car $n-k-1 = [(1-t)n-1]$).
La question 23 fournit alors en particulier :
$\displaystyle\psi(\alpha_{n,k}) = \ln k + \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\alpha_{n,k}+j} + \varepsilon_n$ et $\displaystyle\psi(1-\alpha_{n,k}) = \ln(n-k-1) + \sum_{j=0}^{n-k-1}\frac{1}{(1-\alpha_{n,k})+j} + \varepsilon_n$.
Comte-tenu de la question précédente, il vient donc $\displaystyle\psi(u_n) - \psi(1-u_n) = \ln\frac{k}{n-k-1} + \varepsilon_n$.
Or $k = [tn] \sim tn$ et $n-k-1 = [(1-t)n-1] \sim (1-t)n$ donc $\displaystyle\frac{k}{n-k-1} \sim \frac{t}{1-t}$ et $\displaystyle\ln\frac{k}{n-k-1} = \ln\frac{t}{1-t} + \varepsilon_n$.
En conclusion $\displaystyle\psi(u_n) - \psi(1-u_n) + \ln\frac{1-t}{t} = \varepsilon_n$. $\square$

26 La formule (A) (dite des compléments) fournit par dérivation logarithmique : $\psi(x) - \psi(1-x) = -\pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$ pour tout $x \in]0,1[$. En particulier pour $x = u_n$ on obtient, compte tenu du résultat précédent :
$\displaystyle\pi\,\mathrm{cotan}(\pi u_n) = \ln\frac{1-t}{t} + \varepsilon_n$ donc $\displaystyle u_n = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Arccotan}\Big(\frac{1}{\pi}\big(\ln\frac{1-t}{t} + \varepsilon_n\big)\Big)$
Par continuité de la fonction Arccotan, il vient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Arccotan}\Big(\frac{1}{\pi}\ln\frac{1-t}{t}\Big)$. $\square$

FIN