

**MINES PONTS
CONCOURS D'ADMISSION 2005**

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

corrigé de Brahim Benmimoun (MP MEKNES).

I. PRÉLIMINAIRES

Question 1

Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in \mathbb{S}_n} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in \mathbb{A}_n}$ de plus $\mathbb{A}_n \cap \mathbb{S}_n = \{0\}$. En effet si $A \in \mathbb{A}_n \cap \mathbb{S}_n$ alors : $A = {}^tA = -A$ donc $A = 0$, d'où le résultat.

Question 2

Si $M = (m_{kl})_{(k,l) \in \{1,..n\}^2} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Alors M s'écrit

$$M = \sum_{(k,l) \in \{1,..n\}^2} m_{kl} E_{kl}.$$

Alors :

$$ME_{ij} = \sum_{(k,l) \in \{1,..n\}^2} m_{kl} E_{kl} E_{ij} = \sum_{k \in \{1,..n\}} m_{ki} E_{kj}$$

Donc

$$\text{tr}(ME_{ij}) = \sum_{k \in \{1,..n\}} m_{ki} \text{tr}(E_{kj}) = m_{ji}$$

Question 3

On remarque que : $\mathbb{A}_n = \text{vect}(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \forall T \in \mathbb{A}_n, \text{tr} MT = 0 &\Leftrightarrow \forall (i, j) \in \{1, ..n\}^2, 1 \leq i < j \leq n : \text{tr}(ME_{ij}) = \text{tr}(ME_{ji}) \Leftrightarrow \\ &\forall (i, j) \in \{1, ..n\}^2, 1 \leq i < j \leq n : m_{ji} = m_{ij} \Leftrightarrow M \in \mathbb{S}_n. \end{aligned}$$

Question 4

Si $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ alors : ${}^t(e^M) = e^{{}^tM}$ il suffit pour cela d'utiliser la continuité et la linéarité de l'application transposée en effet : $\forall n \in \mathbb{N}$

$${}^t\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} ({}^tM)^k \text{ puis on tend } n \text{ vers l'infini .}$$

Soit $T \in \mathbb{A}_n$,

$$\exp(T) {}^t(\exp(T)) = \exp(T) \exp({}^tT) = \underbrace{\exp(T) \exp(-T)}_{\text{car } T \text{ et } -T \text{ commutent}} = \exp(T - T) = \exp(0) = I.$$

Donc e^T est orthogonale .

Question 5

soit s réel,

$$e^{sM} - I - sM = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} s^k M^k = s^2 M^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+2)!} s^k M^k}_{\text{qu'on note } g(s)}.$$

On a :

$$\|M^2 g(s)\| \leq \|M\|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} |s|^k \|M\|^k = \|M\|^2 e^{|s|\|M\|}$$

qui est borné au voisinage de 0 ceci par continuité par rapport à s , on en déduit que :

$$M^2 g(s) = 0(1) \text{ au voisinage de } 0.$$

D'où le résultat .

Question 6

On écrit $M = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ où les C_i sont les colonnes de M .

On note : $(e_i)_{i=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{M}_{n1}(\mathbb{R})$ alors :

$$\det(M - XI) = \det(C_1 - Xe_1, C_2 - Xe_2, \dots, C_n - Xe_n) =$$

$$\det(M) + \sum_{j=1}^n (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \det(C_1, \dots, C_{i_1-1}, e_{i_1}, C_{i_1+1}, \dots, C_{i_j-1}, e_{i_j}, C_{i_j+1}, \dots, C_n) X^j.$$

Or $\forall j \in 1, \dots, n \quad \forall i_1 < \dots < i_j$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$ on a :

$$M \mapsto \det(C_1, \dots, C_{i_1-1}, e_{i_1}, C_{i_1+1}, \dots, C_{i_j-1}, e_{i_j}, C_{i_j+1}, \dots, C_n)$$

est continue .

D'où $M \mapsto \alpha_j(M)$ est continue $\forall j$.

Question 7

$$\det(sM + I) =$$

$$\det(sM) + \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \det(sC_1, \dots, sC_{i_1-1}, e_{i_1}, sC_{i_1+1}, \dots, sC_{i_j-1}, e_{i_j}, sC_{i_j+1}, \dots, sC_n) =$$

$$\underbrace{s^n \det(M) + \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \det(sC_1, \dots, sC_{i_1-1}, e_{i_1}, sC_{i_1+1}, \dots, sC_{i_j-1}, e_{i_j}, sC_{i_j+1}, \dots, sC_n)}_{=0(s^2)} +$$

$$1 + \underbrace{\sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots, e_{i-1}, sC_i, e_{i+1}, \dots, e_n)}_{=s \operatorname{tr}(M)} = 1 + s \operatorname{tr}(M) + 0(s^2)$$

On note

$$N = M + 0(s)$$

On a alors :

$$\det(sM + I + 0(s^2)) = \det(sN + I) = 1 + s \operatorname{tr} N + 0(s^2) = 1 + s \operatorname{tr} M + 0(s^2)$$

Question 8

On se place dans $M_n(\mathbb{C})$ et on note $0, a_2, \dots, a_p$ les valeurs propres de M de multiplicité respective $m_0, m_2, \dots, m_p$, on a déjà $m_0 \geq 1$ car M non inversible. Comme M trigonalisable, il existe P dans $GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure tel que :

$$P^{-1}MP = T$$

1^{er} cas : Si le nombre (avec multiplicité) des valeurs propres négatives est pair.

Soit $D_1 = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{m_0 \text{ fois}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{a_p, \dots, a_p}_{m_p \text{ fois}})$

alors

$$\det(T + sD_1) = s^{m_0}(s+1)^{n-m_0} \underbrace{\prod_{i=2}^p a_i^{m_i}}_{>0} > 0, \forall s > 0$$

On note enfin $N_0 = PDP^{-1}$ et on a, $\forall s > 0$:

$$\det(M + sN_0) = \det(T + sD_1) > 0.$$

(car $P(T + sD_1)P^{-1} = M + sN_0$)

2^{ème} cas :

Si le nombre (avec multiplicité) des valeurs propres négatives est impair.

Quitte à réordonner les valeurs propres, on peut supposer que a_2 est négative.

Soit :

$$D_1 = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{m_0-1 \text{ fois}}, -1, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{a_p, \dots, a_p}_{m_p \text{ fois}})$$

Alors : $\forall s > 0$

$$\det(T + sD_1) = (-s)s^{m_0-1}(s+1)^{n-m_0} \underbrace{\prod_{i=2}^p a_i^{m_i}}_{<0} > 0, \forall s > 0.$$

De la même manière que dans le premier cas, on note $N_0 = PD_1P^{-1}$ on a alors, $\forall s > 0$:

$$\det(M + sN_0) = \det(T + sD_1) > 0.$$

Question 9

si M diagonalisable (respectivement symétrique réelle) soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ (respectivement dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$) tel que :

$$P^{-1}MP = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{m_0 \text{ fois}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{a_p, \dots, a_p}_{m_p \text{ fois}})$$

(respectivement ${}^tPMP = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{m_0 \text{ fois}}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{a_p, \dots, a_p}_{m_p \text{ fois}})$)

On a alors $D_1 = P^{-1}N_0P$ (respectivement $D_1 = {}^tPN_0P$) diagonale réelle donc N_0 est diagonalisable (respectivement symétrique).

II .Démonstration de l'inégalité (1)

Question 10

A et B sont symétriques réelles donc sont diagonalisables, et comme elles commutent il existe donc une base de diagonalisation commune à A et B , quitte à faire une permutation sur cette base on peut supposer que : $P^{-1}AP = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Or $P^{-1}BP$ est diagonale donc il existe $\sigma \in \sigma_n$ telle que : $P^{-1}BP = \text{diag}(b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \dots, b_{\sigma(n)})$.

Ainsi $P^{-1}(A+B)P = \text{diag}(a_1 + b_{\sigma(1)}, a_2 + b_{\sigma(2)}, \dots, a_n + b_{\sigma(n)})$.

Et donc :

$$\det(A+B) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}).$$

Question 11

$\mathcal{O}_n = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \text{ , } {}^tMM = I\} \subset$

$$\{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \text{ , } \|M\| = (\text{tr}({}^tMM))^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}}\}$$

donc est borné .

D'autre part : l'application $f : A \longmapsto {}^tAA$ est continue de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

D'où $\mathcal{O}_n = f^{-1}(\{I\})$ est un fermé (car image réciproque par l'application continue f du fermé $\{I\}$).

En conclusion : puisque l'espace vectoriel $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie alors $\mathcal{O}_n$ est une partie compacte de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 12

$$\mathcal{O}_n(M) = \{UMU^{-1} \text{ , } U \in \mathcal{O}_n\} = g(\mathcal{O}_n)$$

Où $g : U \longmapsto UMU^{-1}$ définie de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$

il est clair que g est continue , et

comme $\mathcal{O}_n(M) = g(\mathcal{O}_n)$ donc $\mathcal{O}_n(M)$ est compact

On considère alors l'application : $C \longmapsto \det(A+C)$ définie de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que cette application est continue donc l'image du compact $\mathbb{O}_n(M)$ est un compact de $\mathbb{R}$ d'où l'existence de B_0 dans $\mathbb{O}_n(M)$ telle que :

$$\det(A + B_0) = \sup_{C \in \mathbb{O}_n(B)} \det(A + C).$$

II.1 $A + B_0$ inversible

Question 13

$$\begin{aligned} \psi_T(s) &= \det(A + e^{sT} B_0 e^{-sT}) = \det[I + (e^{sT} B_0 e^{-sT} - B_0)(A + B_0)^{-1}] \det(A + B_0) = \\ &\quad \det(A + B_0) \det[I + e^{sT} (B_0 e^{-sT} - e^{-sT} B_0)(A + B_0)^{-1}] \end{aligned}$$

Or :

$$B_0 e^{-sT} - e^{-sT} B_0 = B_0(I - sT + 0(s^2)) - (I - sT + 0(s^2))B_0 = s(TB_0 - B_0T) + 0(s^2)$$

$$\text{Et donc : } e^{sT} (B_0 e^{-sT} - e^{-sT} B_0) =$$

$$(I + sT + 0(s^2))[s(TB_0 - B_0T) + 0(s^2)] = s(TB_0 - B_0T) + 0(s^2)$$

$$\text{Ainsi : } \psi_T(s) = \det(A + B_0) \det[I + s(TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1} + 0(s^2)] =$$

$$\det(A + B_0)(1 + \text{str}[(TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1}] + 0(s^2)).$$

(ceci d'après la relation (3) de la question (7)).

Question 14

Soit $U \in \mathbb{O}_n$ tel que $B_0 = UBU^{-1}$, soit s réel notons $V = e^{sT}U \in \mathbb{O}_n$ de sorte que $VBV^{-1} = e^{sT}B_0e^{-sT}$.

On en déduit que : $e^{sT}B_0e^{-sT} \in \mathbb{O}_n(B)$.

D'où

$$\psi_T(s) = \det(A + e^{sT}B_0e^{-sT}) \leq \det(A + B_0) = \psi_T(0).$$

Question 15

Puisque $\forall s$ réel, $\psi_T(s) \leq \psi_T(0)$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall s \in [-\alpha, \alpha]$:

$$1 + s \text{ tr}[(TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1}] \leq 1.$$

et donc $\forall s \in [-\alpha, \alpha]$: $s \text{ tr}[(TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1}] \leq 0$, de sorte que :

$$\text{tr}[(TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1}] = 0.$$

$$\text{D'où : } \text{tr}[TB_0(A + B_0)^{-1}] = \text{tr}[B_0T(A + B_0)^{-1}] = \text{tr}[T(A + B_0)^{-1}B_0].$$

Question 16

On a

$$\forall T \in \mathbb{A}_n : \text{tr} T [B_0(A + B_0)^{-1} - (A + B_0)^{-1}B_0] = 0.$$

Donc d'après la question (3) : $[B_0(A + B_0)^{-1}] - [(A + B_0)^{-1}B_0]$ est symétrique et donc :

$$[({}^t A + {}^t B_0)^{-1}({}^t B_0)] - [{}^t B_0({}^t A + {}^t B_0)^{-1}] = [B_0(A + B_0)^{-1}] - [(A + B_0)^{-1}B_0].$$

Et comme A et B_0 sont symétriques alors :

$$[(A + B_0)^{-1}B_0] - [B_0(A + B_0)^{-1}] = [B_0(A + B_0)^{-1}] - [(A + B_0)^{-1}B_0].$$

Ce qui donne : $[B_0(A + B_0)^{-1}] - [(A + B_0)^{-1}B_0] = 0$. d'où : $[B_0(A + B_0)^{-1}] = [(A + B_0)^{-1}B_0]$.
et donc

$$(A + B_0)[B_0(A + B_0)^{-1}](A + B_0) = (A + B_0)[(A + B_0)^{-1}B_0](A + B_0).$$

Ainsi : $B_0(A + B_0) = (A + B_0)(A + B_0)$ et par suite : $AB_0 = B_0A$.

Question 17

Déjà $B \in \mathbb{O}_n(B)$ (prendre $U = I$) de plus A et B_0 sont diagonalisables
(car symétriques réelles) et commutent et comme B et B_0 ont le même spectre alors :
il existe $\sigma \in \sigma_n$ telle que :

$$\det(A + B) \leq \det(A + B_0) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}) \leq \max_{\tau \in \sigma_n} \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\tau(k)}).$$

II.2 $A + B_0$ singulière

Question 18

d'après la question (8), $A + B_0$ est symétrique réelle non inversible, soit donc
 N_0 symétrique telle que :
 $\forall s > 0$;

$$\det(A + B_0 + sN_0) > 0.$$

On note alors : $\forall k > 0$ entier $N_k = B_0 + \frac{1}{k}N_0$, N_k est alors symétrique et tend vers
 B_0 quand k tend vers l'infini.

Soit, pour tout entier non nul k , $B_k \in \mathbb{O}_n(N_k)$ telle que :

$$\det(A + B_k) = \sup_{C \in \mathbb{O}_n(N_k)} \det(A + C).$$

On a alors : $0 < \det(A + N_k) \leq \det(A + B_k)$ (car $N_k \in \mathbb{O}_n(N_k)$).

D'après II.1 puisque $A + B_k$ est inversible alors A et B_k commutent d'où le résultat.

Question 19

Notons pour k entier non nul :

$$\text{sp } B_k = \text{sp } N_k = \{\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}\}.$$

$A + B_0$ est symétrique il en est de même de N_0 et donc $N_k = B_0 + \frac{1}{k}N_0$ est symétrique réelle. Il existe alors $P_k \in \mathbb{O}_n$ telle que :

$$P_k N_k P_k^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_n^{(k)}) \text{ qu'on note } D_k.$$

Comme $\mathbb{O}_n$ est compact il existe alors ; $(P_{\varphi(k)})_k$ sous suite de $(P_k)_k$ et $P \in \mathbb{O}_n$ telles que : la suite $(P_k)_k$ converge vers P .

D'autre part :

$$P_{\varphi(k)} N_{\varphi(k)} P_{\varphi(k)}^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{(\varphi(k))}, \lambda_2^{(\varphi(k))}, \dots, \lambda_n^{(\varphi(k))}) = D_{\varphi(k)}.$$

En tendant k vers l'infini on déduit que la suite $(D_{\varphi(k)})_k$ converge et de limite $P B_0 P^{-1}$ et puisque $\forall k \geq 1$ $D_{\varphi(k)}$ est diagonale alors $P B_0 P^{-1}$ l'est aussi .
Donc il existe $\tau \in \sigma_n$ telle que :

$$\text{diag}(\lambda_1^{(\varphi(k))}, \lambda_2^{(\varphi(k))}, \dots, \lambda_n^{(\varphi(k))}) = D_{\varphi(k)} \text{ converge vers } \text{diag}(b_{\tau(1)}, b_{\tau(2)}, \dots, b_{\tau(n)}).$$

Si $k \geq 1$, A et $B_{\varphi(k)}$ sont des matrices réelles symétriques qui commutent il existe alors $\sigma_k \in \sigma_n$ telle que :

$$\det(A + N_{\varphi(k)}) \leq \det(A + B_{\varphi(k)}) = \prod_{j=1}^n (a_j + \lambda_{\sigma_k(j)}^{(\varphi(k))}) \leq \max_{\sigma \in \sigma_n} \prod_{j=1}^n (a_j + \lambda_{\sigma(j)}^{(\varphi(k))}).$$

En tendant k vers l'infini on trouve :

$$\det(A + B_0) \leq \max_{\sigma \in \sigma_n} \prod_{j=1}^n (a_j + b_{\tau(\sigma(j))}) = \max_{\sigma \in \sigma_n} \prod_{j=1}^n (a_j + b_{\sigma(j)}),$$

(car $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de σ_n sur lui même).

III .Une permutation qui réalise le maximum

Question 20

On montre le résultat par récurrence sur n .

si $n = 2$:

le résultat est évident si σ est la transposition (12) .

Si $\sigma = id$: On a $a_1(b_2 - b_1) \leq a_1(b_2 - b_1)$, Donc :

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \leq (a_1 + b_2)(a_2 + b_1).$$

On suppose le résultat vrai à l'ordre $n - 1$, on veut le montrer à l'ordre n soient $(a_k, 1 \leq k \leq n)$ et $(b_k, 1 \leq k \leq n)$ réels vérifiant H et $\sigma \in \sigma_n$.

1^{er} cas : si $\sigma(n) = 1$.

on considère $(a_k, 1 \leq k \leq n-1), (b'_k, 1 \leq k \leq n-1)$ (avec $b'_k = b_{k+1}$) ces deux suites vérifient π_{n-1} .

Soit τ tel que : $\tau(i) = \sigma(i) - 1, \forall i = 1, \dots, n-1$ il est clair que $\tau \in \sigma_{n-1}$, donc :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_{\sigma(k)}) &= \prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b'_{\sigma(k)-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b'_{\tau(k)}) \leq \\ &\prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b'_{n-1-k+1}) = \prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_{n-k+1}). \end{aligned}$$

Donc :

$$\prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}) \leq \left[\prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_{n-k+1}) \right] (a_n + b_1) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{n-k+1}).$$

2^{ème} cas : si $\sigma(n) = j > 1, \sigma(i) = 1$ où $i < n$.

On note τ_1 la transposition $(1j)$ et $\tau = \tau_1 \circ \sigma$.

On a τ vérifie les hypothèses du premier cas et $\sigma = \tau$ sauf aux points i et n donc :

$$\prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_{\tau(k)}) \leq \prod_{k=1}^n (a_k + b_{n-k+1}).$$

Ainsi :

$$(a_n + b_1)(a_i + b_j) \prod_{k \neq i, n} (a_k + b_{\sigma(k)}) = (a_n + b_1)(a_i + b_j) \prod_{k \neq i, n} (a_k + b_{\tau(k)}) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\tau(k)}) \leq \prod_{k=1}^n (a_k + b_{n-k+1}).$$

Or : $a_n(b_1 - b_j) \leq a_i(b_1 - b_j)$ et donc :

$$(a_n + b_j)(a_i + b_1) \leq (a_n + b_1)(a_i + b_j).$$

En conclusion :

$$\forall \sigma \in \sigma_n ; \quad \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}) \leq \prod_{k=1}^n (a_k + b_{n-k+1}).$$