

**MINES PONTS
CONCOURS D'ADMISSION 2005**

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
corrigé de Brahim Benmimoun (MP MEKNES).

I.CALCULS PRÉLIMINAIRES

Question 1.

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}| \leq \frac{1}{\rho} e^{-\rho x^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $\rho > 0$ et donc $e^{-\rho x^2} = o(\frac{1}{x^2})$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$).
donc F_f est bien définie.

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^x f(u)e^{-\frac{u^2}{2}} du = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(u)e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{\text{constante}} + \underbrace{\int_0^x f(u)e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{C^1}.$$

comme f est continue sur $\mathbb{R}$ alors F_f est C^1 de plus :

$$(F_f)'(x) = f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$$

ainsi F_f est une application C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$
(ceci puisque les limites en $-\infty$ et $+\infty$ valent 0 et $\sqrt{2\pi}$ respectivement).

En conclusion F_f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

Question 2 et 3.

Déjà $1 \in H$; il suffit de prendre $\rho = \frac{1}{2}$ ainsi F_1 est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

Analyse :

si φ existe alors : $F_f \circ \varphi = F_1$ d'où $\varphi = F_f^{-1} \circ F_1$.

D'où l'unicité.

Synthèse :

on pose $\varphi = F_f^{-1} \circ F_1$ de sorte que φ soit un C^1 difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (comme composé de deux C^1 difféomorphismes strictement croissants).

Question 4

on a : $F_f \circ \varphi = F_1$ donc en dérivant : $f(\varphi(x))\varphi'(x)e^{-\frac{\varphi^2(x)}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}}$ on passe au ln puisque tous les termes sont strictement positifs on trouve $-\frac{1}{2}x^2$, de même : $\varphi^{-1} = F_1^{-1} \circ F_f$ on dérive on trouve :

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{F_1'(F_1^{-1}(F_f(x)))} F_f'(x)$$

$$= f(x)e^{\frac{(\varphi^{-1}(x))^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

puis on passe au $\ln$, le résultat cherché est : $-\frac{1}{2}x^2$.

Question 5

si $A < B$ on pose $v = \varphi(u)$ alors :

$$\begin{aligned} & \int_A^B h(\varphi(u))e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} h(v)f(v)e^{-\frac{v^2}{2}} dv. \end{aligned}$$

En faisant tendre A et B respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ et en utilisant le difféomorphisme strictement croissant φ et le fait que $v \mapsto h(v)f(v)e^{-\frac{v^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ on trouve le résultat .

Question 6

Soit A tel que : $\varphi(A) > 0$ le A existe car $\lim_{+\infty} \varphi(x) = +\infty$, soit $x \geq A$, $\forall v$ tel que $x \leq v \leq x+1$ on a :

$$\varphi^2(x) \leq \varphi^2(v).$$

et

$$e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \leq e^{-\frac{v^2}{2}}.$$

On obtient alors :

$$\varphi^2(x)e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \leq \int_x^{x+1} \varphi^2(v)e^{-\frac{v^2}{2}} dv.$$

Question 7

La fonction $v \mapsto v^2 f(v)e^{-\frac{v^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; (car $v^2 f(v)e^{-\frac{v^2}{2}} \leq v^2 \frac{1}{\rho} e^{-\rho v^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$) donc la fonction $v \mapsto \varphi^2(v)e^{-\frac{v^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (il suffit de prendre $h(v) = v^2$ et utiliser (5)).

Soit donc $C > 0$ qu'on peut choisir supérieur à A tel que :

$$\int_x^{x+1} \varphi^2(v)e^{-\frac{v^2}{2}} dv \leq 1, \forall x \geq C.$$

De la même manière que dans (6) soit $C' > 0$ tel que $\forall x < -C'$ on a :

$$\varphi(x) < 0$$

et

$$\int_{x-1}^x \varphi^2(v)e^{-\frac{v^2}{2}} dv \leq 1.$$

donc

$$\varphi^2(x)e^{-\frac{(-x+1)^2}{2}} \leq \int_{x-1}^x \varphi^2(v)e^{-\frac{v^2}{2}} dv \leq 1.$$

Si on prend $B = \max(C, C')$ on a alors :

$\forall x$, tel que $|x| \geq B$:

$$\varphi^2(x)e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}} \leq 1.$$

Donc $\forall |x| \geq B$:

$$|\varphi(x)| \leq e^{\frac{(|x|+1)^2}{4}}.$$

Question 8

$$(u\varphi(u) - \varphi'(u))e^{-\frac{u^2}{2}} = -(\varphi(u))e^{-\frac{u^2}{2}}'.$$

et

$$(1 - u^2)e^{-\frac{u^2}{2}} = (ue^{-\frac{u^2}{2}})'.$$

$(u - \varphi(u))e^{-\frac{u^2}{2}}$ est Donc est une primitive de :

$$u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Question 9

d'après l' inégalité de (7) :

$$(u - \varphi(u))e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

a une limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$ on en déduit que $I = 0$

Remarque : On vérifie aisément que Les fonctions : $u \mapsto u^2e^{-\frac{u^2}{2}}$, $u \mapsto u\varphi(u)e^{-\frac{u^2}{2}}$, $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$

sont intégrables car $(|u|\varphi(u))e^{-\frac{u^2}{2}} \leq |u|e^{-\frac{u^2+2|u|+1}{4}}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.)

On déduit alors en utilisant $I = 0$ que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(u)e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

converge.

II .UNE INÉGALITE INTERESSANTE

Question 10

par convexité de $\psi : x \mapsto x \ln x$ sur $]0, +\infty[$ on obtient :

$$\forall x > 0, x \ln x > x - 1.$$

$y=x-1$ étant l' équation de la tangente en 1 a la courbe de ψ on a alors si on

note : $\beta(v) = (f(v) - 1)e^{-\frac{v^2}{2}} \leq \ln(f(v))f(v)e^{-\frac{v^2}{2}}$.

D'autre part notons :

$$\alpha(v) = \frac{1}{\rho}e^{-\frac{v^2}{2}}(-\ln(\rho) + (1 - \rho)\frac{v^2}{2}) \geq \ln(f(v))f(v)e^{-\frac{v^2}{2}}.$$

On obtient : $|\ln(f(v))f(v)e^{-\frac{v^2}{2}}| \leq |\alpha(v)| + |\beta(v)|.$

On vérifie aisément que les fonctions α et β sont intégrables sur $\mathbb{R}$ ainsi $v \mapsto \ln(f(v))f(v)e^{-\frac{v^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi $E(f)$ est bien définie.

Les fonctions :

$$v \mapsto v^2e^{-\frac{v^2}{2}}, u \mapsto u\varphi(v)e^{-\frac{v^2}{2}}, v \mapsto \varphi^2(v)e^{-\frac{v^2}{2}}.$$

sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Donc

$$(u - \varphi(u))^2e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi $\Phi(f)$ est bien définie.

Question 11

On pose $h(v) = \ln f(v)$ et puisque $v \mapsto \ln(f(v))f(v)e^{-\frac{v^2}{2}}$ est intégrable, en utilisant la question (5) on obtient :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln(f(\varphi(u)))e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Question 12

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln(f(\varphi(u))) - \frac{1}{2}(u - \varphi(u))^2)e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} (-u^2 + u\varphi(u) - \ln(\varphi'(u)))e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

(ceci d'après(4)).

on peut en déduire que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(\varphi'(u))e^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge .

Or $I = 0$ donc :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \varphi'(u) - \ln(\varphi'(u)))e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Question 13

En utilisant

$$\ln x \leq x - 1, \forall x > 0.$$

On obtient : $\ln \varphi'(u) \leq \varphi'(u) - 1, \forall u$ réel .

Donc :

$$E(f) - \Phi(f) \geq 0.$$

Question 14

$$E(f) - \Phi(f) = 0 \iff \varphi'(u) - 1 = \ln \varphi'(u), \forall u \in \mathbb{R} \iff$$

$$\varphi'(u) = 1, \forall u \in \mathbb{R} \iff$$

$$\varphi(u) = u + c,$$

avec c constante réelle .

Ainsi : $f(u) = e^{cu - \frac{c^2}{2}}$ (car $f(\varphi(u))\varphi'(u)e^{-\frac{\varphi^2(u)}{2}} = e^{-\frac{u^2}{2}}$.)

On a utilisé $\int_{-\infty}^{+\infty} s(x)dx = 0$ où s est continue positive sur $\mathbb{R}$ entraîne $s = 0$;

car si J segment de $\mathbb{R}$ $\int_J s(x)dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} s(x)dx = 0$, donc s nulle sur J ceci pour tout J en particulier $\forall x : s(x)=0$ (prendre $\{J=x\}$).

III. EXTENSION AUX FONCTIONS POSITIVES

Question 15

déjà si $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in H_0$ en effet, f_n est continue et :

$$0 < f_n \leq ((1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}) \frac{1}{\rho'} \exp(\frac{1}{2} - \rho')x^2 = \frac{1}{\rho'} \exp(\frac{1}{2} - \rho')x^2.$$

où

$$\rho' = \min(\underbrace{\rho}_{\text{associé à } g}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{associé à } f=1}).$$

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)g(u)\right) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

La fonction ψ étant convexe donc :

$$\psi(f_n(u)) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\psi(g)(u) + \frac{1}{n}\psi(1)(u) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\psi(g)(u) \leq \psi(g)(u).$$

Or $u \mapsto \psi(g)(u) e^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue ; intégrable ceci d'après l'inégalité :

$$|\psi(g)(v) e^{-\frac{v^2}{2}}| \leq |\alpha(v)| + |\beta(v)|.$$

qui est vraie même si $\psi(g)(u) = 0$ Avec $\alpha(v) = (-\ln(\rho) + (1 - \rho)\frac{v^2}{2})e^{-\frac{v^2}{2}}$, $\beta(v) = (g(v) - 1)e^{-\frac{v^2}{2}}$, avec $g(v) \leq \frac{1}{\rho} \exp((\frac{1}{2} - \rho)v^2)$.

Et comme $(\psi(f_n))_n$ converge simplement vers $\psi(g)$ alors en utilisant le théorème de convergence dominée on obtient :

$$(E(f_n))_n \text{ converge vers } E(g).$$

Question 16

Soit $x \in \mathbb{R}$ la suite $(\varphi_n(x))_n$ étant bornée réelle donc :

l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est non vide, égal à $\overline{\cap_n \{\varphi_k(x)/k \geq n\}}$, Donc fermé borné de $\mathbb{R}$ donc compact d'où l'existence de $\psi_1(x)$ et de $\psi_2(x)$.

Soit donc $(\varphi_{\sigma(n)}(x))_n$ une sous suite de $(\varphi_n(x))_n$ qui converge vers $\psi_1(x)$, on vérifie que :

$$\psi_1(x) = \sup_n (\inf \{f_n(x), k \geq n\})$$

et que :

$$\psi_2(x) = \inf_n (\sup \{f_n(x), k \geq n\}).$$

Or $0 \leq \int_{\varphi_{\sigma(n)}(x)}^{\psi_1(x)} f_{\sigma(n)}(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \int_{\varphi_{\sigma(n)}(x)}^{\psi_1(x)} (1 + g(u)) e^{-\frac{u^2}{2}} du$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

De plus :

$$\int_{-\infty}^{\varphi_{\sigma(n)}(x)} f_{\sigma(n)}(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Ensuite $\int_{-\infty}^{\psi_1(x)} f_{\sigma(n)}(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge vers $\int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du$ (ceci par théorème de convergence dominée).

On obtient alors par sommation et par passage à la limite :

$$\int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

En effet :

$$\int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \underbrace{\int_{-\infty}^{\psi_1(x)} (g(u) - f_{\sigma(n)}(u)) e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{\text{tend vers 0}} + \int_{-\infty}^{\varphi_{\sigma(n)}(x)} f_{\sigma(n)}(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du + \underbrace{\int_{\varphi_{\sigma(n)}(x)}^{\psi_1(x)} f_{\sigma(n)}(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{\text{tend vers 0}}.$$

terme dont la limite est : $\int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ quand n tend vers l'infini.
même raisonnement pour ψ_2 .

Question 17

Soient x, y réels tel que $x < y$,

$$\int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du < \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{\psi_1(y)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

On obtient :

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du > 0.$$

De sorte que $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ (car g positive), Même chose pour ψ_2 .

D'autre part la fonction ψ_1 est strictement croissante donc possède une limite en $-\infty$ notée a' (qui peut être ∞).

Et comme : $\int_a^{\psi_1(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du > 0$. donc $\psi_1(x) \geq a$ donc $a' \geq a$.

$$\int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_a^{\psi_1(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

D'où comme :

$$\int_a^{\psi_1(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

en tendant x vers $-\infty$ on trouve : $\int_a^{a'} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$,

D'où $a' = a$ (car sinon $a < a'$ et donc g serait nulle sur $]-\infty, a'[$ et alors a ne serait plus la borne inférieure de $\{x/g(x) > 0\}$)

même raisonnement en $+\infty$.

Question 18

Remarque : si $x < y$ des éléments de $\mathbb{R}$ et z, t avec $x < z < t < y$
alors :

$$\psi_1(x) < \psi_1(z) < \psi_1(t) < \psi_1(y).$$

en faisant tendre z vers x et t vers y on trouve : $\psi_1(x^+) < \psi_1(y^-)$. (car ψ_1 strictement croissante).
ainsi : $\psi_1(x^-) \leq \psi_1(x^+) < \psi_1(y^-) \leq \psi_1(y^+)$.

1^{er} cas : a et $b \in \mathbb{R}$

On suppose qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_p$ des éléments de $D_{\frac{1}{N}}$ tel que $p > N(b-a)$.

Alors $\psi_1(x_1^+) < \psi_1(x_1^+) < \psi_1(x_2^-) < \psi_1(x_2^+) < \dots < \psi_1(x_p^-) < \psi_1(x_p^+)$.

D'où $b-a \geq \psi_1(x_p^+) - \psi_1(x_1^-) \geq \sum_{i=1}^p (\psi(x_i^+) - \psi(x_i^-)) > p \frac{1}{N}$

d'où $p < N(b-a)$ contradiction.

2^{ème} cas : si a ou b est infini :

Puisque $\mathbb{R} = \cup_{k \in \mathbb{N}} [-k, k]$

on note : $D_{k, \frac{1}{N}} = \{x / \psi_1(x^+) - \psi_1(x^-) > \frac{1}{N}; [\psi_1(x^-), \psi_1(x^+)] \subset [-k, k]\}$.

Alors : $D_{\frac{1}{N}} = \cup_k D_{k, \frac{1}{N}}$.

Or $\text{card } D_{k, \frac{1}{N}} < 2k \frac{1}{N}$, donc $D_{\frac{1}{N}}$ est au plus dénombrable car union dénombrable de parties au plus dénombrables.

Question 19 :

$D = \cup_{N \in \mathbb{N}^*} D_{\frac{1}{N}}$ donc D est au plus dénombrable car union dénombrable de parties au plus dénombrables (on remarque que la suite $(D_{\frac{1}{N}})_N$ est croissante).

Question 20

comme : $\int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{\psi_2(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

on obtient :

$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$. et comme g positive continue et $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ alors g est nulle sur $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$.

Question 21

soit $(y, z) \in [a, b]^2$ tel que $y < x < z$:

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_1(z)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_y^z e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

En tendant y et z vers x on trouve :

$$\int_{\psi_1(x^-)}^{\psi_1(x^+)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0$$

de sorte que $\psi_1(x^-) = \psi_1(x^+)$.

Car si non g serait nulle sur $[\psi_1(x^-), \psi_1(x^+)]$ qui contient $\psi_1(x)$ (car ψ_1 croissante) et on aurait : $g(\psi_1(x)) = 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Question 22

Par l'absurde :

On suppose que $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ et que ψ_1 est continue en x alors (d'après la question 20) :

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0.$$

On pose

$$\varepsilon = \psi_2(x) - \psi_1(x) > 0.$$

comme ψ_1 est continue en x alors :

Soit $\eta > 0$ tel que : $\forall y \in]x - \eta, x + \eta[$ on a : $|\psi_1(x) - \psi_1(y)| < \varepsilon$.

Soit $z \in]x, x + \eta[$ alors :

$$0 < \psi_1(z) - \psi_1(x) < \varepsilon = \psi_2(x) - \psi_1(x).$$

donc $\psi_2(x) > \psi_1(z)$ et comme g est positive alors :

$$0 \leq \int_{\psi_1(x)}^{\psi_1(z)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0.$$

de sorte que $\forall z \in]x, x + \eta[$ on a :

$$0 < \int_x^z e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_1(z)} g(u) e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0 \text{ ce qui est absurde, d'où le résultat.}$$

Question 23

Si K est fini on n'a pas, forcément le résultat (si $K = \{x_0, x_1\}$ on doit avoir $|\psi_1(x_0) - \psi_1(x_1)| \leq \varepsilon$ ce qui n'est pas toujours vérifié). On démontre le résultat avec les $x_{2j} \leq x_{2j+1}$ (et pas $x_{2j} < x_{2j+1}$).

ψ_1 étant continue sur K donc ψ_1 est uniformément continue (K compact),

soit donc $\delta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in K^2$ si $|x - y| < \delta$ alors :

$$|\psi_1(x) - \psi_1(y)| < \varepsilon.$$

(K compact on peut donc le mettre dans $[\min K, \max K]$ puis découper ce segment en des segments de longueur inférieure à δ).

soient q entier et $(c'_j, d'_j)_{j=0}^q$ réels avec :

$$K \subset \bigcup_{j=1}^q [c'_j, d'_j]$$

et tel que :

$$0 < (d'_j - c'_j) < \delta \text{ et } [c'_j, d'_j] \cap K \neq \emptyset.$$

on note alors : $c_j = \min_{j=0}^q [c'_j, d'_j] \cap K$, $d_j = \max_{j=0}^q [c'_j, d'_j] \cap K$:

On a alors : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c_j \leq u \leq v \leq d_j$:

$$|\psi_1(u) - \psi_1(v)| \leq |\psi_1(d_j) - \psi_1(c_j)| \leq \varepsilon$$

(car ψ_1 est croissante)

on note enfin :

$$x_{2j} = c_j, x_{2j+1} = d_j.$$

Question 24

Soit $x \in K$ et j tel que $x \in [x_{2j}, x_{2j+1}]$, il existe N_j entier tel que si $n \geq N_j$ on a :

$$|\varphi_n(x_{2j}) - \psi_1(x_{2j})| < \varepsilon \text{ et } |\varphi_n(x_{2j+1}) - \psi_1(x_{2j+1})| < \varepsilon.$$

On a utiliser le fait que ψ_1 est continue aux points : x_{2j} et x_{2j+1} et donc la suite $(\varphi_n(x_{2j}))_n$ possède une unique valeur d'adhérence donc converge vers $\psi_1(x_{2j})$ (car $\psi_1(x_{2j}) = \psi_2(x_{2j})$).

même chose avec x_{2j+1} .

De plus :

$$|\psi_1(x) - \psi_1(x_{2j})| \leq \varepsilon.$$

(car $x \in [x_{2j}, x_{2j+1}]$)

D'autre part : , Soit $n \geq \max_{j=0}^q N_j$ qu'on note N'

$$\varphi_n(x_{2j}) \leq \varphi_n(x) \leq \psi_1(x_{2j+1})$$

et

$$\psi_1(x_{2j}) \leq \psi_1(x) \leq \psi_1(x_{2j})$$

(ceci par croissance des fonctions ψ_1, φ_n).

d'où :

$$\psi_1(x_{2j}) - \varphi_n(x_{2j+1}) \leq \psi_1(x) - \varphi_n(x) \leq \psi_1(x_{2j+1}) - \varphi_n(x_{2j}) (*).$$

or : $|\psi_1(x_{2j+1}) - \varphi_n(x_{2j})| \leq |\psi_1(x_{2j+1}) - \psi_1(x_{2j})| + |\psi_1(x_{2j}) - \varphi_n(x_{2j})| \leq 2\varepsilon.$

et : $|\psi_1(x_{2j}) - \varphi_n(x_{2j+1})| \leq |\psi_1(x_{2j}) - \psi_1(x_{2j+1})| + |\psi_1(x_{2j+1}) - \varphi_n(x_{2j+1})| \leq 2\varepsilon.$ On en déduit avec (*) que :

$|\psi_1(x) - \varphi_n(x)| \leq 2\varepsilon$ ceci $\forall n \geq N'$, d'où le résultat.

Question 25

On remarque que D est d'intérieur vide car au plus dénombrable donc C est dense dans $\mathbb{R}$, Soit donc A assez grand tel que A et $-A$ appartiennent à C .

$\forall m, \in \mathbb{N}, \forall u \in [-A, A]$ on a : $\varphi_m(-A) \leq \varphi_m(u) \leq \varphi_m(A).$

Soit N tel que $\forall m \geq N : |\varphi_m(A) - \psi_1(A)| < 1, |\varphi_m(-A) - \psi_1(-A)| < 1$ (car $(\varphi_m(x))_m$ converge vers $\psi_1(x) \forall x \in C$).

D'où

$$-1 + \psi_1(-A) \leq \varphi_m(u) \leq 1 + \psi_1(A).$$

Ainsi $\forall m \geq N, \forall u \in [-A, A]$ on a :

$$-1 - |\psi_1(-A)| - |\psi_1(A)| \leq \varphi_m(u) \leq 1 + |\psi_1(-A)| + |\psi_1(A)|.$$

D'où le résultat.

On note $M_0 = |\psi_1(A)| + |\psi_1(-A)| + 1$

Soient pour $i=1,2,...,N-1 : M_i = \sup\{|\varphi_i(u)|; u \in [-A, A]\}$ (M_i existe car φ_i continue et $[-A, A]$ compact)

et

$$L = \max_{i=0}^{N-1} M_i.$$

on a alors : $\forall n; \forall u \in [-A, A] :$

$$|\varphi_n(u)| \leq L$$

D'où $\forall n; \forall u \in [-A, A]$

$$|u - \varphi_n(u)|^2 \leq (|u| + |\varphi_n(u)|)^2 \leq (A + L)^2.$$

D'où le sup $\{|u - \varphi_n(u)|^2 / |u| \leq A, n \geq 1\}$ est fini.

Question 26

$\forall n \geq 1, \forall p \geq 1 :$

$$\int_{J_p} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq M 2 \frac{2^{-p} \varepsilon}{M} = 2\varepsilon 2^{-p}.$$

or $\forall n \geq 1, \forall u \in [-A, A], |u - \varphi_n(u)|^2 \leq M$ donc $|u - \psi_1(u)|^2 \leq M$ (il suffit pour cela de prendre une sous suite de $(\varphi_n(u))_n$ qui converge vers $\psi_1(u)$).

Donc :

$$\int_{J_p} |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq M 2 \frac{2^{-p} \varepsilon}{M} = 2\varepsilon 2^{-p}.$$

Or :

$$\int_{\bigcup_{p \geq 1} J_p} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{J_p} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq 2\varepsilon \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = 2\varepsilon$$

De même :

$$\int_{\bigcup_{p \geq 1} J_p} |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq 2\varepsilon.$$

Donc :

$$\left| \int_{\bigcup_{p \geq 1} J_p} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_{\bigcup_{p \geq 1} J_p} |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leq 4\varepsilon.$$

De plus : $\int_K |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge vers $\int_K |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du$ (car K est fermé inclu dans $[-A, A]$ donc compact , or K inclu dans C donc $(\varphi_n)_n$ converge uniformement vers ψ_1 sur K .)

Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists N / \forall n \geq N : \left| \int_K |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_K |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| < \varepsilon.$

De sorte que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-A}^A |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_{-A}^A |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \\ & \leq \left| \int_K |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int_K |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| + \int_{\bigcup_{p \geq 1} J_p} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du + \int_{\bigcup_{p \geq 1} J_p} |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq 5\varepsilon, \text{ ceci étant } \forall n \geq N \text{ d'où le résultat.} \end{aligned}$$

Question 27

$$\forall A > 0; \frac{1}{2} \int_{-A}^A |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq E(f_n).$$

En faisant tendre n vers l'infini il vient : $\frac{1}{2} \int_{-A}^A |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq E(g).$

D'où : $u \mapsto |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable de plus :

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u - \psi_1(u)|^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq E(g).$$