Concours Commun Mines-Ponts 2001 MP/PSI - Sujet 1 - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Mots-clés : algèbre linéaire, réduction d'endomorphisme, application semi-linéaire, valeur co-propre

Commentaires : Problème centré autour de la "diagonalisation" pour une variante des applications linéaires. Il est recommandé de bien savoir manier la réduction d'endomorphisme dans le cas classique. La correction est basée sur l'énoncé du problème MP, mais le problème PSI est très proche.

Première Partie

I.1.a. Si $u(x) = \mu_1 x$ et $u(x) = \mu_2 x$, alors $(\mu_1 - \mu_2)x = 0$, ce qui donne $\mu_1 = \mu_2$ puisque x est supposé non nul.

1.1.b. Soit $x \neq 0$ un vecteur co-propre associé à μ. Nous avons :

$$u(e^{-i\theta/2}x) = e^{i\theta/2}u(x) = e^{i\theta/2}\mu x = (e^{i\theta}\mu)(e^{-i\theta/2}x),$$

et donc $e^{-i\theta/2}x$ est un vecteur co-propre pour $e^{i\theta}\mu$. En particulier, dès qu'on a une valeur co-propre, on en a une infinité : la réduction des applications semi-linéaires s'annonce très différente de celle des applications linéaires.

I.1.c. Si $x \in E_\mu$, et $x \neq 0$, alors la question précédente montre que $e^{-i\theta/2}x \notin E_\mu$, et donc E_μ n'est pas un espace vectoriel complexe. En revanche, si λ est réel, $x,y \in E_\mu$, alors :

$$u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

E_μ est un espace vectoriel réel.

I.1.d. Pour x,y dans E et λ complexe, on a :

$$u \circ v(x + \lambda y) = u(v(x) + \bar{\lambda}v(y)) = u \circ v(x) + \lambda u \circ v(y).$$

L'application $u \circ v$ est donc linéaire.

I.2.a. Soit A la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sone les Ae_i, exprimés dans la base canonique. Si $X = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, alors $A\bar{X} = x_1Ae_1 + \cdots + x_nAe_n = Y$, ou Y est la matrice colonne associée au vecteur $y = u(x)$.

I.2.b. Soient x et y des vecteurs liés par $y = u(x)$. Si X et X' (resp. Y et Y') sont les matrices-colonnes de x (resp. y) dans les bases (e_i) et (f_i), alors on a les relations suivantes :

1. $Y = A\bar{X}$.
2. $Y' = B\bar{X}'$.
3. $X = SX'$, et $Y = SY'$ (attention!!! C'est souvent à ce niveau qu'on commet une erreur!)

Alors $Y = SY' = SB\bar{X}' = SB\overline{S^{-1}}\bar{X}$, et donc $A = SB\overline{S^{-1}}$.

I.3.a. Si μ est une valeur co-propre, alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\bar{b} & = & \mu a \\ \bar{a} & = & \mu b \end{array}\right.$$

Comme X n'est pas nul, le système précédent montre que $\mu \neq 0$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On trouve alors $|\mu|^2 = -1$, ce qui est impossible! La matrice A n'admet pas de valeurs co-propres!

I.3.b. Si A est une matrice réelle, qui admet une valeur propre réelle λ, alors elle admet pour cette valeur propre un vecteur propre réel non nul X. Nous avons alors $A\bar{X} = AX = \lambda X$. En particulier, λ est valeur co-propre.

I.4.a. Soit X un vecteur co-propre pour μ. Alors :

$$A\bar{A}X = A\overline{A\bar{X}} = \bar{\mu}A\bar{X} = |\mu|^2 X,$$

et donc $|\mu|^2$ est une valeur propre de $A\bar{A}$.

I.4.b. i. Premier cas : $A\bar{X}$ et X sont liés. Il existe donc un complexe μ tels que $A\bar{X} = \mu X$. Alors :

$$A\bar{A}X = A\bar{\mu}\bar{X} = |\mu|^2 X = \lambda X.$$

En particulier, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\mu| = \sqrt{\lambda}$, et μ est valeur co-propre de A. La question **I.1.b** nous permet d'affirmer qu'en fait $\sqrt{\lambda}$ est lui-même valeur co-propre de A.

ii. Deuxième cas : les vecteurs $A\bar{X}$ et X sont indépendants. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \bar{A}(A\bar{X} - \sqrt{\lambda}X) & = & \bar{A}A\bar{X} - \sqrt{\lambda}\bar{A}X \\ & = & \lambda\bar{X} - \sqrt{\lambda}\bar{A}X \\ & = & -\sqrt{\lambda}(\bar{A}X - \sqrt{\lambda}\bar{X}) \\ & = & -\sqrt{\lambda}\overline{(A\bar{X} - \sqrt{\lambda}X)}, \end{array}$$

et $-\sqrt{\lambda}$ est valeur co-propre de A. Donc $\sqrt{\lambda}$ aussi.

I.4.c. a. démontre un sens de l'équivalence, et b. la réciproque.

I.5.a. Comme A est triangulaire supérieure, $A\bar{A}$ l'est aussi, les coefficients sur la diagonale étant le module au carré des coefficients sur la diagonale de A. Soit λ une valeur propre de A. Comme A est triangulaire supérieure, les valeurs propres se lisent sur la diagonale, et $|\lambda|^2$ est valeur propre de $A\bar{A}$. D'après **I.4.**, $|\lambda|$ est valeur co-propre de A. Nous concluons toujours grâce à **I.1.b**.

I.5.b. Si μ est une valeur co-propre de A, $|\mu|^2$ est une valeur propre de $A\bar{A}$. Comme les valeurs propres de $A\bar{A}$ sont les modules (au carré) des valeurs propres de A, il existe λ un complexe tel que $|\lambda| = |\mu|$, et λ est une valeur propre de A.

I.5.c. 1 est valeur co-propre de A, car i est valeur propre de A, et $1 = e^{-i\pi/2}i$. En outre :

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a - ib \\ c - id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(a-d) + b + c \\ ic + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}.$$

Nous résolvons l'équation. Par exemple, le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur co-propre pour 1.

I.6. Soit X une matrice-colonne de taille n, qu'on décompose en $X = U + iV$, où U et V sont réelles. Alors,

$$A\overline{X} = (BU + CV) + i(CU - BV).$$

Si X est vecteur copropre associé à μ, on a en particulier : $BU + CV = \mu U$ et $CU - BV = \mu V$. D'autre part, si on considère la matrice-colonne de taille 2n $Y = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, alors :

$$DY = \begin{pmatrix} BU + CV \\ CU - BV \end{pmatrix}.$$

Donc, si X est vecteur copropre pour μ relativement à A, Y est vecteur propre pour μ relativement à D.
Réciproquement, si μ est valeur propre de D, comme D est réelle, il existe un vecteur propre réel (décomposer n'importe quel vecteur propre en partie réelle/partie imaginaire) Y, qu'on décompose comme ci-dessus. Alors le vecteur $X = u + iV$ est vecteur copropre de μ (relativement à A).

Deuxième Partie

II.1. Rappelons que pour prouver que $\approx$ est une relation d'équivalence, il faut démontrer trois points :

Réflexivité : Nous avons $A = I.A.\bar{I}^{-1}$, et donc $A \approx A$.

Symétrie : Si $A \approx B$ alors il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ avec $B = S.A.\bar{S}^{-1}$. Alors : $A = S^{-1}B\bar{S} = T.B.\bar{T}^{-1}$ avec $T = S^{-1}$, et $B \approx A$.

Transitivité : Si $A \approx B$ et $B \approx C$, soient S,T de $GL_n(\mathbb{C})$ avec $B = S.A.\bar{S}^{-1}$ et $C = T.B.\bar{T}^{-1}$. Alors $C = (TS).A.\overline{(TS)}^{-1}$, et $C \approx A$.

II.2. Nous classons les valeurs propres par module croissant $|\mu_1| < |\mu_2| < \ldots < |\mu_k|$, et nous supposons que nous avons une relation de liaison $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_p X_p = 0$, avec $\lambda_p \neq 0$. Appliquant $2r$ fois u, nous obtenons :

$$|\mu_1|^{2r}\lambda_1 X_1 + \cdots + |\mu_p|^{2r}\lambda_p X_p = 0.$$

Posons :

$$Y_r = \lambda_p X_p + \left(\frac{|\mu_1|}{|\mu_p|}\right)^{2r}\lambda_1 X_1 + \cdots + \left(\frac{|\mu_{p-1}|}{|\mu_p|}\right)^{2r}\lambda_{p-1}X_{p-1}.$$

Nous savons que $|\mu_p|^{2r}Y_r = 0$. Mais comme $|\mu_i| < |\mu_p|$ pour $i < p$, Y_r tend vers $\lambda_p X_p$ quand $r \to +\infty$. En particulier, pour r assez grand, $Y_r \neq 0$. Ceci contredit que $|\mu_p|^{2r}Y_r = 0$.
Si $A\bar{A}$ a n valeurs propres positives ou nulles distinctes les unes des autres, A admet n valeurs co-propres de modules distincts les uns des autres. Le travail que nous venons d'effectuer nous permet d'affirmer que E possède une base de vecteurs co-propres pour l'application co-linéaire u définie par A. Le calcul de la matrice de u dans cette base, associée au résultat de **I.2.b** assure que A est co-diagonalisable.

II.3.a. Nous avons $A.\bar{A} = S\bar{S}^{-1}\bar{S}S^{-1} = I_n$.

II.3.b. $S(\theta)$ s'écrit encore $S(\theta) = e^{i\theta}(A + e^{-2i\theta}I_n)$. Comme A admet un nombre fini de valeurs propres, il existe un θ pour lequel $-e^{2i\theta}$ n'est pas valeur propre de A, et pour lequel $A + e^{2i\theta}I_n$ est inversible. Il en est de même de $S(\theta)$.
Nous avons alors :

$$A\bar{S}(\theta) = e^{-i\theta}A\bar{A} + e^{i\theta}A = S(\theta).$$

Ainsi, $A = S(\theta)\overline{S(\theta)}^{-1}$.

II.4. Un simple calcul montre que $A\bar{A} = SD\bar{D}S^{-1}$, où $D\bar{D}$ est diagonale, ses coefficients étant positifs ou nuls. En outre, nous avons :

$$rg(A\bar{A}) = rg(D\bar{D}) = rg(D) = rg(A).$$

II.5.a. D'une part :

$$B\bar{B} = S^{-1}A\bar{S}\bar{S}^{-1}\bar{A}S = S^{-1}A\bar{A}S = \Lambda.$$

D'autre part :

$$\bar{B}B = \bar{S}^{-1}\bar{A}S = \bar{S}^{-1}\bar{A}A\bar{S} = \Lambda.$$

En particulier, $B\bar{B} = \bar{B}B$. Il s'en suit que $B\Lambda = BB\bar{B} = \bar{B}BB = \lambda B$.

II.5.b. Il s'agit ici du problème classique de la recherche du commutant d'une matrice. Nous pouvons par exemple rechercher B par blocs, avec des blocs de la bonne taille pour multiplier par l'écriture de Λ par blocs, écrire que $B\Lambda = \Lambda B$, et il apparait automatiquement que B a la forme demandée. On peut aussi préférer une version typée endomorphisme de ce raisonnement. Ainsi, comme B commute avec Λ, le noyau de $\Lambda - \lambda_p I_n$ est stable par B.

II.5.c. Du fait que $B\bar{B} = \Lambda$, chaque matrice B_p vérifie que $B_p\bar{B}_p = \lambda_p I_{n_p}$. Si $\lambda_p \neq 0$, on utilise alors le résultat de **II.3.b.**, à la matrice $A = \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}B_p$, pour prouver que B_p est co-semblable à une matrice diagonale. Le cas litigieux de $\lambda_k = 0$ se traite de la façon suivante : comme le rang de $A\bar{A}$ vaut le rang de A, le rang de B est celui de Λ. Dans le cas où $\lambda_k = 0$, le rang de Λ est $n_1 + \dots + n_{k-1}$. Le rang de B est $rg(B_1) + \dots + rg(B_k)$. Mais le calcul $B_p\bar{B}_p = \lambda_p I_{n_p}$ prouve que pour $p < k$, le rang de B_p est exactement n_p. On trouve donc que le rang de B_k est nul, ou encore que $B_k = 0$.

En résumé, pour tout p de 1 à k, il existe des matrices inversibles S_p et des matrices diagonales D_p telles que $B_p = S_p D_p \bar{S_p}^{-1}$. Nous posons alors :

$$P = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & \dots & \\ 0 & S_2 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & S_k \end{pmatrix} \quad \Delta = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & \\ 0 & D_2 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & D_k \end{pmatrix}.$$

Nous avons $B = P\Delta\bar{P}^{-1}$, et donc B est co-diagonalisable. Comme cette notion est invariante par matrice co-semblable, A est aussi co-diagonalisable.

II.6.a. Il suffit de montrer les conditions i. ii. et iii. pour une matrice symétrique réelle. i et ii sont très faciles. Montrons que le rang de A vaut le rang de A^2. Pour cela, il suffit de prouver que $Ker(A)$ et $Im(A)$ sont en somme directe. Nous faisons même un peu mieux puisque nous prouvons que $Ker(A)$ et $Im(A)$ sont orthogonaux. En effet, si x est dans $Ker(A)$ et y dans $Im(A)$, $y = Az$, alors :

$$< x,y >=< x,Az >=< Ax,z >=< 0,z >= 0.$$

En particulier, toute matrice symétrique réelle est co-diagonalisable.

II.6.b. Nous essayons d'appliquer la CNS de **II.4.** et **II.5.** à ces matrices : On a :

$$A\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D\bar{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors,

- A n'est pas diagonalisable, et est co-diagonalisable.
- B est diagonalisable (admet deux valeurs propres distinctes), mais n'est pas co-diagonalisable (les valeurs propres de $B\bar{B}$ sont complexes).
- C n'est pas diagonalisable, et n'est pas co-diagonalisable (le rang de $C\bar{C}$ est inférieur strict à celui de C).
- D est diagonalisable (idem B), et est co-diagonalisable.

Tous les cas sont donc possibles!