

Concours Communs Polytechniques - Session 2007

Corrigé de l'épreuve d'algèbre

Étude des groupes d'isométries sur $\mathbb{R}^n$.

Corrigé par Mohamed TARQI

I. Description des normes euclidiennes

1. Identité du parallélogramme

1a. Soit φ un produit scalaire de E tel que $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$, et soient x et y deux éléments de E , on a :

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 + N(x-y)^2 &= \varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) \\ &= 2\varphi(x, x) + 2\varphi(y, y) \\ &= 2[N(x)^2 + N(y)^2]. \end{aligned}$$

Si la norme $\|\cdot\|_\infty$ est euclidienne, alors elle doit vérifier l'identité du parallélogramme, en particulier pour $x = e_1$ et $y = e_2$, on a $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \|x+y\|_\infty = \|x-y\|_\infty = 1$, on obtient

$$1^2 + 1^2 = 2(1^2 + 1^2)$$

ce qui est faux, donc la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas euclidienne.

1b. La norme $\|\cdot\|_2$ est euclidienne puisque c'est la norme associée au produit scalaire canonique :

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Le même exemple montre que $\|\cdot\|_p$ ($p \neq 2$) n'est pas une norme euclidienne.

2. Si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ est un produit scalaire sur E , en effet, l'application considérée est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

3. Soit φ un produit scalaire sur E , alors φ est forme bilinéaire symétrique et définie positive, autrement dit la matrice $S = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est symétrique et définie positive, donc $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\varphi(x, y) = {}^t XSY$, c'est-à-dire $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle_S$.

II. Quelques généralités et exemples

4. Il est clair que l'application identique est dans $\text{Isom}(N)$, de plus si u et v sont dans $\text{Isom}(N)$ alors $N(uv(x)) = N(v(x)) = N(x)$, donc $uv \in \text{Isom}(N)$. Enfin si $u \in \text{Isom}(N)$, alors u est inversible, car si $u(x) = 0$, alors $N(x) = N(u(x)) = 0$ donc $x = 0$ (propriété de la norme) et $N(u^{-1}(x)) = Nu(u^{-1}(x)) = N(x)$, donc $u^{-1} \in \text{Isom}(N)$ et par conséquent $(\text{Isom}(N), \cdot)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

5. Soit $x \in \Sigma(N)$, alors $N(u(x)) = N(x) = 1$, donc $u(x) \in \Sigma(N)$, c'est-à-dire $u(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$. Inversement, soit $y \in \Sigma(N)$, alors, puisque u est une bijection, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, donc $1 = N(y) = N(u(x)) = N(x)$, d'où $y \in \Sigma(N)$ et $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$. Réciproquement, si $x = 0$, on a $N(u(0)) = N(0) = 0$. Soit maintenant $x \in E \setminus \{0\}$, alors $y = \frac{x}{N(x)} \in \Sigma(N)$ et donc $1 = N(u(y)) = \frac{1}{N(x)}N(u(x))$ et par conséquent $N(u(x)) = N(x)$, donc on a l'équivalence demandé.

6. Il est clair que la boule unité (dessiner une figure) est stable la symétrie d'axe D d'équation $x + y = 0$, alors que ne l'est pas pour la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc s est une $\|\cdot\|_1$ -isométrie et r ne l'est pas.

7a. La matrice représentant la forme quadratique est :

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7b. La matrice S étant symétrique, donc diagonalisable et admet une base orthonormale de vecteurs propres. Le polynôme caractéristique est $\chi_S(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 = (\lambda - 2)^2(4 - \lambda)$ Le sous-espace propre associé à 2 est engendré par v_1 et v_2 avec $v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ qui forment une base orthonormée. Le sous-espace associé à 4 est donc dirigé par $v_3 = v_1 \wedge v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$. Finalement

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7c. N_q est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, donc norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

7d. Soit M un point de Σ_q et (X, Y, Z) ses coordonnées dans le repère (O, v_1, v_2, v_3) , alors :

$$\overrightarrow{OM} = Xv_1 + Yv_2 + Zv_3 = \left(\frac{X}{\sqrt{6}} + \frac{Y}{\sqrt{3}} - \frac{Z}{\sqrt{2}}, \frac{Y}{\sqrt{3}} - \frac{2X}{\sqrt{6}}, \frac{X}{\sqrt{6}} + \frac{Y}{\sqrt{3}} + \frac{Z}{\sqrt{2}} \right)$$

Donc $M \in \Sigma_q$, si et seulement si $2X^2 + 2Y^2 + 4Z^4 = 1$ et alors $\Sigma(N_q) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz = 1\}$ est une ellipsoïde.

7e. $\Sigma(N_q)$ est une surface de révolution, puisque S admet une valeur propre double, son axe est dirigé par v_3 . On peut remarquer aussi que $\Sigma(N_q)$ a une équation de type $f(X^2 + Y^2, Z) = 0$, donc stable par toute rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan (XY) .

7f. D'après la question 5. $\text{Isom}(N_q)$ a une infinité d'éléments, car $\Sigma(N_q)$ est stable par toute rotation, donc N_q -isométrie, d'axe dirigé par v_3 et ceux dernières sont en nombre infini.

III. Étude de $\text{Isom}(N)$ lorsque N est une norme euclidienne

8a. Si pour tous vecteurs x et y de E , on a $\langle u(x), u(y) \rangle_S = \langle x, y \rangle_S$, alors en particulier si $x = y$ on obtient $\langle u(x), u(x) \rangle_S = \langle x, x \rangle_S$ qui s'écrit encore $N_S(u(x)) = N_S(x)$. Réciproquement, d'après l'identité de polarisation on a :

$$\begin{aligned} \langle u(x), u(y) \rangle_S &= \frac{1}{2}(N^2(u(x) + u(y)) - N^2(u(x)) - N^2(u(y))) \\ &= \frac{1}{2}(N^2(x + y) - N^2(x) - N^2(y)) = \langle x, y \rangle_S. \end{aligned}$$

Donc u est N_S -isométrie.

8b. Puisque $\langle u(x), u(y) \rangle = {}^t(AX)SA(AY) = {}^tX^tASAY$, alors l'égalité

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

valable pour tous x et y de E , est équivalent à ${}^tASA = S$.

9. La matrice associée au produit scalaire canonique, dans la base canonique, est la matrice identité I_n , donc $A \in \text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$ si et seulement si ${}^tAA = I_n$, donc $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2) = O_n(\mathbb{R})$. Comme $O_n(\mathbb{R})$ étant

infini (il contient les matrices $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$), $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$ est infini.

10. Une application des polynômes interpolations

10a. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à r , tels que $P(x_0) = P(x_1) = \dots = P(x_r) = 0$, donc P admet $r+1$ distinctes, donc il est nul. Le noyau de u est donc $\{0\}$. Les deux espaces considérés sont de même dimension, donc u est bijective et par conséquent pour tous réels $y_0, y_1, \dots, y_r$, il existe un unique polynôme L tel que $u(L) = (y_0, y_1, \dots, y_r)$, un tel polynôme est donné par :

$$L = \sum_{i=0}^r \left(y_i \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

10b. Soit $r = \text{card}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ($1 \leq r \leq n$), quitte à changer l'indexation on peut supposer $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_r = u_{r+1} = \dots = u_n$. On sait qu'il existe un polynôme L tel que pour $(i = 1, 2, \dots, r)$ on $L(u_i) = \sqrt{u_i}$. Alors

$$L(U) = \begin{pmatrix} L(u_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & L(u_r) & & \\ & & & L(u_{r+1}) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & L(u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{u_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{u_r} & & \\ & & & \sqrt{u_{r+1}} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \sqrt{u_n} \end{pmatrix} = V$$

11. Racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

11a. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc il existe une matrice P orthogonale tel que $S = PD^tP$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres positifs de S , on vérifie facilement que $S = A^2$ où $A = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^t P$.

11b. Soient $U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $V = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et soit L un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $L(U) = V$. Nous avons donc

$$L(B^2) = L(S) = L(PU^tP) = PL(U)^tP = PV^tP = A,$$

la polynôme $Q(X) = L(X^2)$ convient.

$AB = BA$ puisque A est un polynôme en B .

11c. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel $(A+B)X = 0$, donc $AX = -BX$ et par conséquent ${}^tXAX = -{}^tXBX$, c'est-à-dire $N_A^2(X) = -N_B(X)^2$, donc $N_A(X) = N_B(X) = 0$ et par suite $X = 0$ et $A+B$ est inversible.

11c. $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = S - AB + BA - S = 0$ et comme $A+B$ est inversible, alors $A-B = 0$ d'où $A = B$.

12. Etude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne

12a. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM = I_n$, d'autre part

$${}^t(\sqrt{S}^{-1}M\sqrt{S})S(\sqrt{S}^{-1}M\sqrt{S}) = \sqrt{S}^tM\sqrt{S}^{-1}\sqrt{S}\sqrt{S}\sqrt{S}^{-1}M\sqrt{S} = S,$$

donc $\sqrt{S}^{-1}M\sqrt{S} \in \mathbf{ISOM}(N_S)$.

12b. Soient M et N de $O_n(\mathbb{R})$ tels que $\sqrt{S}^{-1}M\sqrt{S} = \sqrt{S}^{-1}N\sqrt{S}$, alors par multiplication à droite et à gauche par $\sqrt{S}$ et $\sqrt{S}^{-1}$ on obtient $M = N$.

D'autre part si $N \in \mathbf{ISOM}(N_S)$, alors $\sqrt{S}N\sqrt{S}^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ et $\psi(\sqrt{S}N\sqrt{S}^{-1}) = N$, donc ψ est surjective. De même, comme $O_n(\mathbb{R})$ étant infini et ψ est une bijection de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{ISOM}(N_S)$, alors $\mathbf{ISOM}(N_S)$ est aussi infini.

IV. Etude du cardinal de $\mathbf{Isom}(p)$ **13. Endomorphismes de permutation signée**

13a. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, alors $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i)} \varepsilon_{\sigma^{-1}(i)} e_i$, d'où

$$\|u_{\sigma,\varepsilon}(x)\|_p = \sum_{i=1}^n (|x_{\sigma^{-1}(i)} \varepsilon_{\sigma^{-1}(i)}|^p)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n (|x_{\sigma^{-1}(i)}|^p)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^n (|x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p,$$

donc $u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p -isométrie.

13b. On a $u_{\sigma,\varepsilon}(e_1) = e_3$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_2) = e_4$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_3) = -e_1$ et $u_{\sigma,\varepsilon}(e_4) = e_2$, d'où

$$[u_{\sigma,\varepsilon}]_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Inégalité de Hölder

14a. La fonction logarithme népérien étant concave, donc pour a et b strictement positifs on obtient

$$\ln \left[\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right] \geq \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q = \ln ab, \text{ en composant par l'exponentielle on obtient } \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \geq ab.$$

Si $a = 0$ ou $b = 0$ l'inégalité est triviale.

14b. Le cas ou $x = 0$ ou $y = 0$ est immédiat. Appliquons le résultat de **14a.** à $a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$ et $b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$, puis sommions :

$$\begin{aligned} \frac{|\sum_{i=1}^n x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p \|x\|_p^p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q \|y\|_q^q} \|y\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

d'où $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

14c. Pour $p = 2, q = 2$, donc l'inégalité de Holdër n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le produit scalaire canonique.

15. Soit $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, alors, puisque u est une p -isométrie, $\|u(e_j)\|_p = \|e_j\|_p$, égalité qui s'écrit encore :

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1,$$

et par conséquent on obtient, en sommant sur j : $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = n$.

16. Une formule de dualité

16a. Soit $x \in E$ fixé. L'application $l_x : y \rightarrow |\langle x, y \rangle|$ étant continue, comme composée de deux applications continues, sur le compact Σ_q (fermé borné de E), donc elle bornée et atteint ses bornes, en particulier $\max_{y \in \Sigma_q} l_x = \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$ existe.

16b. Soit $z \in \sum_q$ tel que $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| = |\langle x, z \rangle|$ et d'après la question **14b.** on a : $|\langle x, z \rangle| \leq \|x\|_p \|z\|_q = \|x\|_p$.

Le vecteur y ainsi construit est bien un élément de Σ_q puisque

$$\|y\|_q^q = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i x_i|^{p-1} \|x\|_p^{1-p} = \|x\|_p^{-p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p = 1,$$

de plus

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\|_p^{1-p} \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i |x_i|^{p-1} = \|x\|_p^{1-p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|x\|_p.$$

Ainsi, puisque $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p$, $\|x\|_p = \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$.

17. Supposons que u est une p -isométrie, donc $u(\Sigma_p) = \Sigma_q$. D'après la question **16b.**, on a aussi

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_q = \max_{y \in \Sigma_p} |\langle x, y \rangle|,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|u^*(x)\|_q &= \max_{y \in \Sigma_q} |\langle u^*(x), y \rangle| \\ &= \max_{y \in \Sigma_p} |\langle x, u(y) \rangle| \\ &= \max_{z \in u(\Sigma_p)} |\langle x, z \rangle| \\ &= \max_{p \in \Sigma_p} |\langle x, p \rangle| = \|x\|_p \end{aligned}$$

donc u^* est une q -isométrie.

On sait que la matrice représentant l'endomorphisme u^* , dans la base canonique, est ${}^t[u]_{B_c}$, donc d'après la question **15.** on a :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ji}|^q = n.$$

18a. L'égalité $\sum_{k=1}^r \alpha_k^p = \sum_{k=1}^r \alpha_k^q$, s'écrit aussi $\|x\|_p^p = \|x\|_q^p$ avec $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$, l'inégalité $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ entraîne pour $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$:

$$\|x\|_2^2 \leq \|x\|_p^p,$$

qui s'écrit aussi :

$$\sum_{i=1}^r (\alpha_i^2 - \alpha_i^p) \leq 0.$$

Si $p > 2$, on a $\forall i$ donc $\alpha_i^2 - \alpha_i^p \geq 0$, donc on aura $\forall i$ $\alpha_i = 0$ ou $\alpha_i = 1$.

Si $p < 2$, alors $q > 2$ et on a de même $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_q^q$, on a donc $\alpha_i = 0$ ou $\alpha_i = 1$.

Finalement α_i ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

18b. D'après ce qui précède $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^q$, donc $\forall i, j \ |a_{ij}| = 0$ où $|a_{ij}| = 1$.

19. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice d'une p -isométrie u , d'après la question précédente $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ et comme $\|u(e_j)\|_p^p = \|e_j\|_p^p$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1$ alors il existe une permutation σ de $\mathcal{P}_n$ tel que $a_{\sigma(j)j} = \varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ et $a_{\sigma(i)j} = 0$ pour $i \neq j$, donc u est de la forme $u_{\sigma, \varepsilon}$.

Réciproquement, tout endomorphisme de type $u_{\sigma, \varepsilon}$ est une p -isométrie (la question **13a.**).

Conclusion :

$$\text{Isom}(p) = \{u_{\sigma, \varepsilon} / \sigma \in \mathcal{P}_n \text{ et } \varepsilon \in \{-1, 1\}^n\}$$

et par conséquent $\text{card Isom}(p) = 2^n n!$, quantité indépendante de p .

• • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr