Concours Communs Polytechniques 2006

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2

rédigé par Stéphane Legros (stephane.legros@free.fr)

I. Généralités

1.a. Les termes diagonaux de la matrice ${}^tYY = 0$ sont les carrés des normes euclidiennes des vecteurs colonnes de Y : on en déduit que Y est nulle dès que ${}^tYY$ est nulle.

1.b. Si $X \in \operatorname{Ker}({}^tAA)$, on a ${}^tX{}^tAAX = 0$, puis ${}^t(AX)(AX) = 0$, soit $AX = 0$ d'après le a. $\operatorname{Ker}({}^tAA)$ est donc contenu dans $\operatorname{Ker}(A)$.

Comme l'autre inclusion est évidente, ces deux sous-espaces sont égaux et ont même dimension. La formule du rang donne ensuite :

$$\operatorname{rg}\left({}^tAA\right) = p - \dim\left(\operatorname{Ker}\left({}^tAA\right)\right) = p - \dim\left(\operatorname{Ker}(A)\right) = \operatorname{rg}(A)$$

en remarquant que ${}^tAA$ et A ont p colonnes.

2. En utilisant la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, la formule du produit matriciel donne :

$${}^tAA = \left(\sum_{k=1}^{n} e_k^*(x_i)e_k^*(x_j)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

soit ${}^tAA = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ puisque la base (e_i) est orthonormale.

La question 1 prouve que $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a même rang que A, i.e. :

$$\operatorname{rg}\left(G(x_1, x_2, \dots, x_n)\right) = \operatorname{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

3.a. On en déduit :

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée $\Longleftrightarrow \operatorname{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n) < n \Longleftrightarrow \operatorname{rg}\left(G(x_1, x_2, \dots, x_n)\right) < n \Longleftrightarrow \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

car $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une matrice carrée de taille n.

3.b. En choisissant une base orthonormale de E et en reprenant la matrice A de la question 2, nous avons :

$$\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det\left({}^tAA\right) = \left(\det(A)\right)^2 \geq 0.$$

Le résultat du **a** prouve que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$.

4. Nous avons directement :

$$0 \leq \Gamma(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$$

d'où l'inégalité demandée.

Il y a une petite erreur d'énoncé : il faut lire "sur un même grand cercle" au lieu de "sur un même cercle" (trois points de la sphère sont toujours sur un même cercle). Quand les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont liés et $\Gamma(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 0$, soit :

$$1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

5.a. Nous avons directement :

$$\begin{aligned}
\Gamma(a+b, y) &= \begin{vmatrix} (\, a+b \mid a+b\,) & (\, a+b \mid y\,) \\ (\, y \mid a+b\,) & (\, y \mid y\,) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (\, a \mid a\,) + (\, b \mid b\,) & (\, b \mid y\,) \\ 0 + (\, y \mid b\,) & (\, y \mid y\,) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (\, a \mid a\,) & (\, b \mid y\,) \\ 0 & (\, y \mid y\,) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\, b \mid b\,) & (\, b \mid y\,) \\ (\, b \mid y\,) & (\, y \mid y\,) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (\, a \mid a\,) & 0 \\ 0 & (\, y \mid y\,) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\, b \mid b\,) & (\, b \mid y\,) \\ (\, b \mid y\,) & (\, y \mid y\,) \end{vmatrix} \\
&= \Gamma(a, y) + \Gamma(b, y)
\end{aligned}$$

la troisème égalité découlant de la linéarité du déterminant par rapport à la première colonne.

5.b. En posant $a = x - z$ et $b = z$, nous avons bien $x - z \perp z$ et $x - z \perp y$: l'égalité précédente donne $\Gamma(x, y) = \Gamma(x - z, y) + \Gamma(z, y) = \Gamma(x - z, y)$ (y et z sont liés).

5.c. En notant $x = \overrightarrow{AB}$ et $y = \overrightarrow{AC}$, les deux vecteurs x et y sont indépendants (car A, B et C ne sont pas alignés). En notant z le projeté orthogonal de x sur la droite engendrée par y et H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de B, nous avons :

$$\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(x, y)} = \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(x - z, y)} = \frac{||x - z||\,||y||}{2} = \frac{BH \times AC}{2}$$

qui est bien l'aire du triangle ABC.

6.a. Quand le parallélépipède est rectangle, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$. On en déduit :

$$\sqrt{\Gamma(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})} = AB \times AC \times AD$$

qui est bien le volume du parallélépipède rectangle.

6.b. La question n'a aucun intérêt, d'autant que la valeur absolue du déterminant de la matrice A dont les colonnes sont les composantes dans la base canonique des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ donne plus rapidement le volume cherché (c'est le calcul classique du volume du parallélépipède, le déterminant de A apparaissant comme Jacobien d'un changement de variable). L'auteur attend peut-être quelque chose du genre :

- on calcule le déterminant de Gram des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, que l'on stocke dans une variable *Gamma* ;
- si *Gamma* est nul, on affiche "Les points sont alignés" ; sinon, on renvoie la racine carrée de *Gamma*.

6.c. Je ne vois pas comment un élève pourrait programmer rapidement cette procédure sur sa machine. Avec Maple (par exemple), on peut écrire :

```
> ps := proc(u,v)
  local i ;
  add(u[i]*v[i],i=1..nops(u))
  end :

> Gram := proc()
  local n,A,i,j ;
  n := nargs() ;
  A := matrix(n,n) ;
  for i to n do for j to n do
     A[i,j] := ps(args[i],args[j])
  od : od :
  linalg[det](A)
  end :

> Volume := proc(A,B,C,D)
  local Gamma ;
  Gamma := Gram(B-A,C-A,D-A) ;
  if Gamma=0 then print(`Les points sont coplanaires.`) else sqrt(Gamma) fi ;
  end :

> Volume([1,2,0],[1,-1,3],[-1,-2,0],[3,-1,0]) ;
```

42

```
> Volume([1,-1,2],[3,4,-7],[0,3,0],[0,2,1]) ;
```

Les points sont coplanaires.

```
> Volume([8,0,3/2],[0,1,-1],[-1/2,2,0],[3,3,0]) ;
```

$\frac{43}{2}$

II. Points équidistants sur une sphère euclidienne

7.a. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ est solution du problème $P(m,t)$, nous avons pour i, j distincts :

$$||x_i - x_j|| = \sqrt{||x_i||^2 + ||x_j||^2 - 2\,(\,x_i \mid x_j\,)} = \sqrt{2(1-t)}$$

qui est bien une constante (ceci prouve en passant que $t \leq 1$).

7.b. La matrice J est de rang 1, donc 0 est valeur propre d'ordre au moins égal à $m-1$ (l'ordre d'une valeur propre est au moins égal à la dimension de l'espace propre associé). La trace de J valant m, on en déduit que la m-ème valeur propre est égale à m, ce qui donne le polynôme caractéristique $\chi_J(X) = (-1)^m X^{m-1}(X-m)$.

7.c. Si $(x_1, \ldots, x_m)$ est solution du problème $P(m,t)$, nous avons :

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_m) = \begin{vmatrix} 1 & t & \ldots & t \\ t & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ t & \ldots & t & 1 \end{vmatrix}$$

Si $t \neq 0$, nous pouvons écrire :

$$\Gamma(x_1,\ldots,x_m) = t^m \det\left(J - (1-1/t)I_m\right) = t^m \chi_J(1-1/t) = (1-t)^{m-1}(1-(m-1)t)$$

et si $t=0$, $\Gamma(x_1,\ldots,x_m)=1$ et la relation précédente est encore valable.

8.a. Si $(x_1,\ldots,x_m)$ est une famille libre solution du problème $P(m,t)$, nous avons :

- $m \leq \dim(E) = n$;
- $|t| = |\,(\,x_1 \mid x_2\,)\,| \leq ||x_1||\,||x_2|| = 1$ donc $t \in [-1,1[$;
- $\Gamma(x_1,\ldots,x_m) > 0$, soit $\underbrace{(1-t)^{m-1}}_{>0}(1+(m-1)t) > 0$, ou encore $t > -\dfrac{1}{m-1}$.

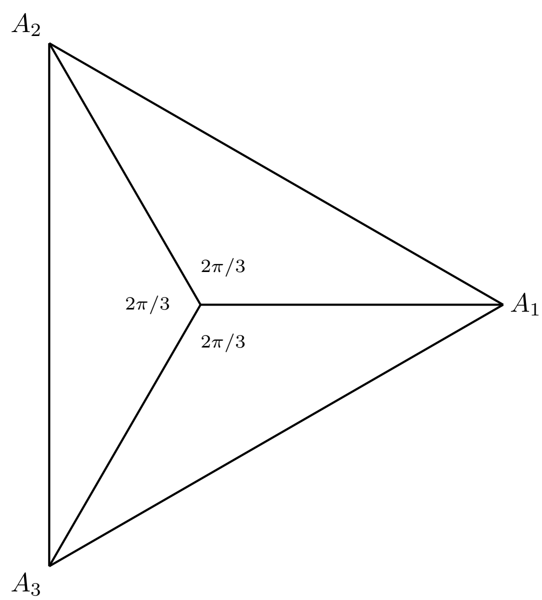
On a donc bien $-\dfrac{1}{m-1} < t < 1$ et $m \leq n$.

8.b. Si $(x_1,\ldots,x_m)$ est une famille liée solution du problème $P(m,t)$, $\Gamma(x_1,\ldots,x_m)=0$ et $t = -\dfrac{1}{m-1}$.

Comme, $(x_1,\ldots,x_{m-1})$ est solution de $P(m-1,t)$, $\Gamma(x_1,\ldots,x_{m-1}) = (1-t)^{m-2}\,(1+(m-2)t) \neq 0$: cela prouve que $(x_1,\ldots,x_{m-1})$ est une famille libre, puis que $m-1 \leq \dim(E)$, i.e. $m \leq n+1$.

8.c. Si une telle famille $(y_1,\ldots,y_5)$ existait, l'angle constant étant noté α, les vecteurs y_i seraient tous non nuls (l'angle n'est défini que pour des vecteurs non nuls) et la famille $(y_1/||y_1||,\ldots,y_5/||y_5||)$ serait solution du problème $P(5,t)$ avec $t=\cos\alpha$: ceci contredit les questions a. et b. (on devrait avoir $5 \leq 4$). Il y a sans doute une erreur dans l'énoncé, puisque l'hypothèse $\pi/2 < \alpha < \pi$ n'est pas utilisée. On peut penser qu'il faut remplacer "cinq points" par "quatre points", mais la question est alors identique à la question 10.a, mais en plus difficile puisque l'on est en dimension 3.

9. La question est mal posée : m semble quelconque, puis on demande de préciser "le" couple (m,t). Ce qui vient d'être fait démontre que l'on doit nécessairement choisir $m=3$ et $t=-1/2$. En choisissant A_1, A_2 et A_3 sur le cercle ce centre O et de rayon 1 et formant un triangle équilatéral, nous avons clairement $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$ solution de $P(3,-1/2)$.



10.a. Il suffit d'appliquer la question précédente à l'espace H : il existe trois points B_1, B_2 et B_3 tel que les vecteurs $y_i = \overrightarrow{OB_i}$ soient une solution de $P(3, -1/2)$.

10.b. Montrons que la famille des x_i est libre : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$. Nous avons alors :

$$a\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i\right) + b\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\right) u = 0$$

soit $\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i\right) = 0$ et $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i$, puisque H et $\mathbb{R}u$ sont en somme directe (et $a \neq 0$, $b \neq 0$). Par produit scalaire avec les vecteurs y_1 et y_2, la première égalité donne :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \dfrac{\lambda_2}{2} - \dfrac{\lambda_3}{2} = 0 \\ -\dfrac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 - \dfrac{\lambda_3}{2} = 0 \end{cases}$$

En ajoutant le seconde égalité, nous obtenons le système de Cramer :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \dfrac{\lambda_2}{2} - \dfrac{\lambda_3}{2} = 0 \\ -\dfrac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 - \dfrac{\lambda_3}{2} = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui prouve que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: la famille est libre.

Pour i compris entre 1 et 3, $||x_i||^2 = a^2||y_i||^2 + b^2||u||^2 + 2ab\,(\, y_i \mid u\,) = a^2 + b^2 = \dfrac{2-2t}{3} + \dfrac{2t+1}{3} = 1$.

Enfin, pour i et j distincts :

$$(\, x_i \mid x_j\,) = a^2\,(\, y_i \mid y_j\,) + ab\underbrace{(\, y_i \mid u\,)}_{=0} + ab\underbrace{(\, y_j \mid u\,)}_{=0} + b^2 = \frac{2-2t}{3} \times \frac{-1}{2} + \frac{2t+1}{3} = t$$

ce qui achève de prouver que (x_1, x_2, x_3) est une famille libre solution de $P(3, t)$.

10.c. Supposons que trois tels points existent. Les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ forment alors une solution du problème $P(3, t)$ avec $t = \cos\alpha$. Deux cas sont alors possibles :

- si les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ sont indépendants, $-1/2 < t < 1$ et $0 < \alpha < 2\pi/3$;
- sinon, $t = -1/2$ et $\alpha = 2\pi/3$.

Nous en déduisons que $0 < \alpha \leq 2\pi/3$.

Réciproquement, si $\alpha \in \,]0, 2\pi/3[$, nous venons de démontrer l'existence de (x_1, x_2, x_3) unitaires tels que $(\, x_i \mid x_j\,) = \cos\alpha$ pour $i \neq j$: les points A_i tels que $\overrightarrow{OA_i} = x_i$ sont donc sur la sphère unité et les angles géométriques des couples $\left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_1}\right)$ sont égaux à α.

Si $\alpha = 2\pi/3$, il suffit de choisir trois points A_1, A_2 et A_3 sur la sphère formant un triangle équilatéral de centre O pour avoir une solution au problème posé.

Nous avons donc démontré qu'il existe trois points distincts A_1, A_2 et A_3 sur la sphère de centre 0 et de rayon 1 tels que les angles géométriques des couples $\left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_1}\right)$ soient tous égaux à α si et seulement si $0 < \alpha \leq 2\pi/3$.

III. Thèorèmes d'Appolonius

11. Fixons une base orthonormale (e_i) de E et notons A (resp. B) la matrice de passage de la base (e_i) à (a_i) (resp. à (b_i)). Les formules de changement de bases donnent $B = AP$, puis :

$$G(b_1, \ldots, b_n) = {}^tBB = {}^tP^tAAP = {}^tPG(a_1, \ldots, a_n)P = P^{-1}G(a_1, \ldots, a_n)P$$

car, (a_i) et (b_i) étant deux bases orthonormales pour le même produit scalaire, la matrice de passage P est orthogonale.

Les matrices $G(a_1, \ldots, a_n)$ et $G(b_1, \ldots, b_n)$ étant semblables, elles ont en particulier même trace, soit :

$$\sum_{i=1}^{n} (\, a_i \mid a_i \,) = \sum_{i=1}^{n} (\, b_i \mid b_i \,)\,.$$

12.a. On vérifie facilement que $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : $\mathcal{C}$ est le cercle unité pour ce produit scalaire.

12.b. e_1 et e_2 sont des diamètres conjugués particuliers de $\mathcal{C}$.

12.c. $\mathcal{C}$ admet une équation implicite de la forme $f(x, y) = 0$ avec f de classe C^1. Pour $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, nous avons :

$$\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0) = 2\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right) \neq (0, 0)$$

car $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Le point (x_0, y_0) est ainsi un point régulier de $\mathcal{C}$, qui admet donc une tangente en ce point, d'équation : $\dfrac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$, qui s'écrit encore $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$.

La droite D a donc pour équation : $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 0$, qui s'écrit bien $\langle \overrightarrow{OM_0}\,, \overrightarrow{OM}\,\rangle = 0$.

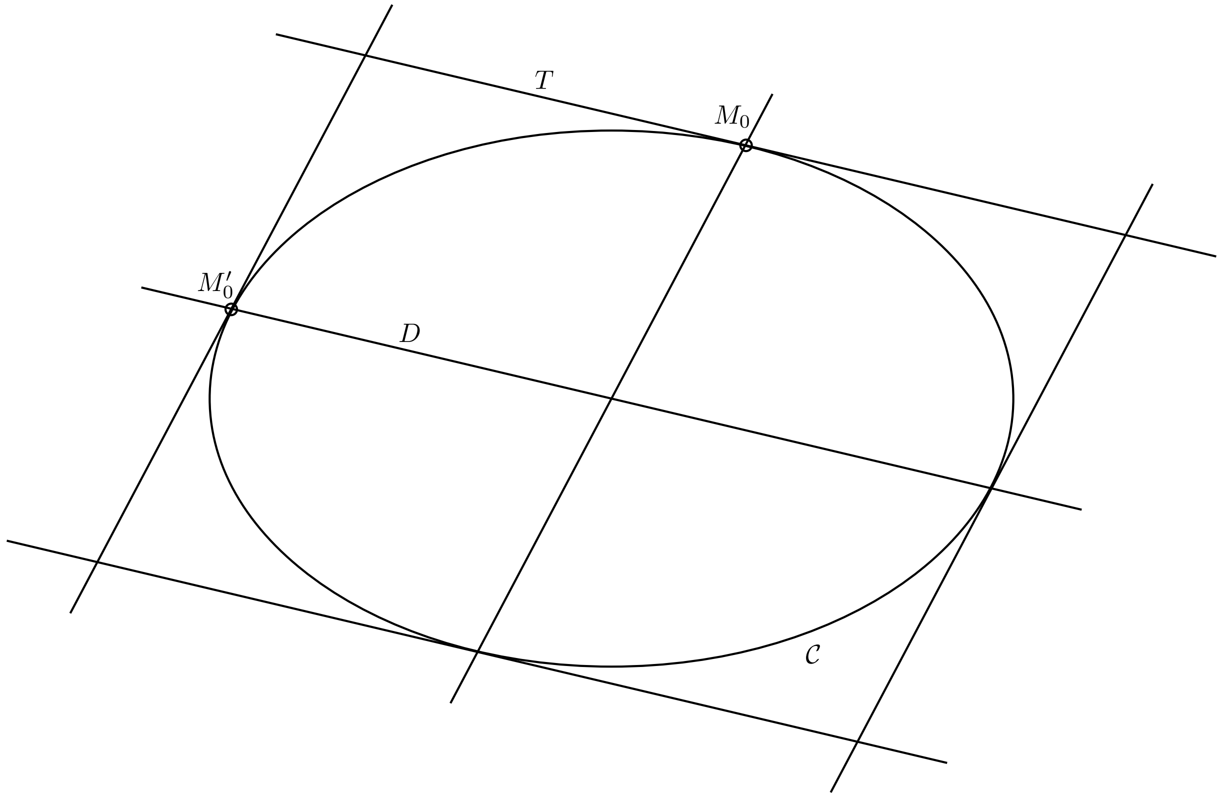
Remarque : ces calculs traduisent simplement que la tangente à un cercle en un point M_0 est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OM_0}$.

En choisissant $M_0' \in D \cap C$, nous avons :

- $\overrightarrow{OM_0} \perp \overrightarrow{OM_0'}$ pour $\langle\ ,\ \rangle$;
- $\langle \overrightarrow{OM_0}\,, \overrightarrow{OM_0}\,\rangle = 1$ car $M_0 \in \mathcal{C}$;
- $\langle \overrightarrow{OM_0'}\,, \overrightarrow{OM_0'}\,\rangle = 1$ car $M_0' \in \mathcal{C}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM_0'}$ sont donc des diamètres conjugués de $\mathcal{C}$.

Ces propriétés conduisent au schéma suivant :



12.d. Les bases $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et (ae_1, be_2) étant orthonormales pour $\langle\ ,\ \rangle$, la question 11 donne :

$$OM^2 + OM'^2 = ||ae_1||^2 + ||be_2||^2 = a^2 + b^2.$$

D'autre part, l'aire A du parallélogramme formé par O, M et M' vaut :

$$A^2 = \Gamma\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \det\left(G\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)\right) = \det\left(P^{-1}G(ae_1, be_2)P\right) = \det\left(G(ae_1, be_2)\right) = a^2b^2$$

ce qui prouve que l'aire du parallélogramme "formé par O, M et M'" est constante, égale à ab.

IV. Recherche d'une isométrie affine

Comme les familles (x_i) et (y_i) ont même matrice de Gram, elles ont même rang p. D'autre part, on peut, quitte à réordonner les vecteurs, supposer que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre. Comme $G(y_1, \ldots, y_p) = G(x_1, \ldots, x_p)$, la famille $(y_1, \ldots, y_p)$ est également libre : la construction donnée par l'énoncé est donc justifiée.

13.a. Soient a et b deux éléments de E. On peut alors écrire :

$$a = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i e_i \text{ et } b = \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i + \sum_{i=p+1}^{n} \beta_i e_i$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
(\, u(a) \mid u(b)\,) &= \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i e'_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} \beta_i y_i + \sum_{i=p+1}^{n} \beta_i e'_i \right) \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq p} \alpha_i\beta_j \,(\, y_i \mid y_j\,) + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i\beta_i \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq p} \alpha_i\beta_j \,(\, x_i \mid x_j\,) + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i\beta_i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} \beta_i x_i + \sum_{i=p+1}^{n} \beta_i e_i \right) \\
&= (\, a \mid b\,)
\end{aligned}$$

donc u conserve le produit scalaire.

13.b. Soit $i \in \{p+1, \ldots, n\}$ et posons $x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j$. Alors :

- $y_i - u(x_i) = y_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \alpha_j y_j \in W$;
- pour tout k compris entre 1 et p :

  $$(\, y_k \mid y_i - u(x_i)\,) = (\, y_k \mid y_i\,) - (\, u(x_k) \mid u(x_i)\,) = (\, y_k \mid y_i\,) - (\, x_k \mid x_i\,) = 0$$

  donc $y_i - u(x_i) \in \{y_1, \ldots, y_p\}^\perp = W^\perp$.

13.c. Comme $W \cap W^\perp = \{0\}$, $u(x_i)$ est également égal à y_i pour i compris entre $p+1$ et n : il existe donc $u \in L(E)$ tel que $u(x_i) = y_i$ pour tout i et $u \in O(E)$ d'après le a. On peut remarquer que la condition $G(x_1, \ldots, x_n) = G(y_1, \ldots, y_n)$ est nécessaire pour qu'un tel u existe. La question 13 a donc permis de démontrer le résultat :

Si E est un espace euclidien et si $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont deux familles de vecteurs de E (on peut remarquer que n peut être différent de la dimension de E), il existe $u \in O(E)$ qui envoie $(x_1, \ldots, x_n)$ sur $(y_1, \ldots, y_n)$ si et seulement si $G(x_1, \ldots, x_n) = G(y_1, \ldots, y_n)$.

14.a. L'égalité de polarité $(\, u \mid v\,) = \dfrac{1}{2}\left(||u||^2 + ||v||^2 - ||u-v||^2\right)$ donne, pour i, j compris entre 1 et n :

$$\begin{aligned}
(\, x_i \mid x_j\,) = \left(\overrightarrow{A_1A_i} \,\middle|\, \overrightarrow{A_1A_j} \right) &= \frac{1}{2}\left(||A_1A_i||^2 + ||A_1A_j||^2 - ||A_jA_i||^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(||B_1B_i||^2 + ||B_1B_j||^2 - ||B_jB_i||^2\right) = \left(\overrightarrow{B_1B_i} \,\middle|\, \overrightarrow{B_1B_j} \right) = (\, y_i \mid y_j\,)
\end{aligned}$$

14.b. D'après la question 13, il existe $u \in O(E_n)$ tel que $u(x_i) = y_i$ pour tout i. Soit alors f l'application affine de E_n dans lui-même définie par $f(A_1) = B_1$ et $\overrightarrow{f} = u$. Nous avons donc :

$$\forall\, M \in E_n,\ f(M) = B_1 + u\left(\overrightarrow{A_1M}\right).$$

Comme $u \in O(E_n)$, $f \in Is(E_n)$ et pour tout i, $f(A_i) = B_1 + u(\overrightarrow{A_1A_i}\,) = B_1 + \overrightarrow{B_1B_i} = B_i$: le résultat demandé est donc démontré.