CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

MP 2005 Math 2

avec quelques adaptations au programme PC

Partie I

1. On a une matrice carrée de taille n qui admet n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable et semblable à l
matrice diagonale des valeurs propres.. Quitte à changer l'ordre des vecteurs propres on peut supposer que les valeu
propres sont dans l'ordre croissant.
$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}$$
Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$ et $S = P^{-1}RP$. Si on multiplie une égalité par une matrice inversible on obtient une égalité équivalent
Donc
$$\boxed{R^2 = A \iff P^{-1}R^2P = D \iff S^2 = D}$$

2. a. On a $SD = S^3 = DS$.

   b. Soient d et s les endomorphismes ayant dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ les matrices D et S ; on a $ds = sd$. Les sou
   espaces propres de d sont stables par s . donc les droites engendrées par les vecteurs de base sont stables par s . \
   $s(e_i) = s_i e_i$ Et donc $S = diag(s_1, \cdots c_n)$
   remarque : on peut aussi poser $S = (s_{i,j})$ et poser le système $SD = DS$ on a $\forall i, j \;\; \lambda_i s_{i,j} = s_{i,j}\lambda_j$ et donc pou
   $i \neq j$, $s_{i,j} = 0$ car $\lambda_i \neq \lambda_j$

   c. On a alors $S^2 = diag(s_1^2, \ldots, s_n^2) = diag(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$, on a donc
   $$\forall i, \; s_i^2 = \lambda_i$$

   d. Si $\lambda_1 < 0$, la relation pour $i = 1$ n'a pas de solutions réelles
   $$Rac(A) = \emptyset$$

   e. Si $\lambda_1 \geq 0$ alors pour $i \geq 2$ $\lambda_i > 0$ et donc :
   $$\boxed{Rac(D) = \{diag(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}) / \; \forall i, \; \varepsilon_i = \pm 1\}}$$

3. On utilise que R est racine carrée de A si et seulement si $S = P^{-1}RP$ est racine carrée de D :
   - Si $\underline{\lambda_1 < 0}$, on a vu en 2.$d$ que $Rac(D) = \emptyset$. Il n'y a donc pas non plus de racine carrée pour A.
   - Si $\underline{\lambda_1 \geq 0}$ alors une racine carrée de D est connue par le choix des ε_i et
   $$\boxed{Rac(A) = \{P.diag(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}).P^{-1} / \; \forall i, \; \varepsilon_i = \pm 1\}}$$

   Deux choix différents des ε_i donneront deux racines carrées distinctes de D sauf dans le cas où $\lambda_1 = 0$. On a don
   $$\boxed{\begin{array}{c} Card(Rac(A)) = 2^{n-1} \text{ si } \; \lambda_1 = 0 \\ Card(Rac(A)) = 2^n \text{ si } \lambda_1 > 0 \end{array}}$$

4. Calculs sans problème. (rappel : la solution n'est pas unique chaque colonne de P est définie à un facteur multiplicat
près par contre les 4 racines carrées doivent être les mêmes pour tout le monde)
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 0. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1. e
$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 16. On pose donc
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
On a alors $A = Pdiag(0, 1, 16)P^{-1}$. A admet quatre racines carrées qui sont
$$P.diag(0, 1, 4).P^{-1}, \; P.diag(0, -1, 4).P^{-1}, \; P.diag(0, 1, -4).P^{-1}, \; P.diag(0, -1, -4).P^{-1}$$
ou encore
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/3 & -5/3 & 5/3 \\ -5/3 & 1/3 & -1/3 \\ 5/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7/3 & 5/3 & -5/3 \\ 5/3 & -1/3 & 1/3 \\ -5/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. a. $R^2=0$ se traduit par $f\circ f=0$ et donc : $y\in \mathrm{Im}(f)\Rightarrow \exists x\in E\ ,\ y=f(x)\Rightarrow f(y)=f^2\,(x)=\overrightarrow{0}$. soit $y\in Ker(f$

$$\boxed{Im(f)\subset Ker(f)}$$

D'après le théorème du rang : $r+dim(Ker(f))=n$. Comme $dim(Ker(f))\geq r$, on a donc

$$r\leq \frac{n}{2}$$

b. La famille $\mathcal{B}$ ayant n éléments, il suffit de montrer qu'elle est libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^n$. On pos donc

$$\sum_{i=1}^{n-r}\alpha_i e_i+\sum_{i=1}^{r}\beta_i u_i=\overrightarrow{0}$$

En composant par f, on obtient comme $f(e_i)=0$ et $f(u_i)=e_i$:

$$\sum_{i=1}^{r}\beta_i f(u_i)=\sum_{i=1}^{r}\beta_i e_i=\overrightarrow{0}$$

Comme $(e_1,\ldots,e_r)$ est une famille libre, les β_i sont tous nuls. En reportant dans l'équation initiale il reste

$$\sum_{i=1}^{n-r}\alpha_i e_i=\overrightarrow{0}$$

et comme $(e_1,\ldots,e_{n-r})$ est une famille libre, les α_i sont aussi tous nuls. Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre. C'est une base de $\mathbb{R}^n$ Par choix des vecteurs de $\mathcal{B}$, on a par blocs :

$$\boxed{M_r=Mat_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}(0) & I_r\\ (0) & (0)\end{pmatrix}}$$

Réciproquement si $Mat_{(v_i)}\,(f)=M_r$ avec $r\leq n/2$ alors on vérifie que:

$$\begin{aligned}&\text{pour } i\ \leq\ n-r\ ,\ f(v_i)=0 \text{ et donc } f^2(v_i)=\overrightarrow{0}\\ &\text{pour } i\ >\ n-r\ ,\ f(v_i)=v_{i-(n-r)} \text{ et donc } f^2(v_i)=\overrightarrow{0}\end{aligned}$$

$$\boxed{f^2=0 \text{ si et seulement si il existe une base telle que } Mat_{\mathcal{B}}(f)=M_r}$$

6. a. Si $R\in Rac(A)$ alors soit $R=0$ soit R est semblable à M_r et donc il existe une matrice inversible P telle qu $R=PM_rP^{-1}$.
Ainsi :

$$\boxed{Rac(0)=\{PM_rP^{-1}/\ P\in GL_n(\mathbb{R}),\ \ r\in\mathbb{N}^*\cap[1,n/2]\}\cup\{0\}}$$

b. Dans le cas $n=4$, les racines carrées de 0 sont 0 et les matrices semblables à l'une des deux matrices

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ \text{ou}\ \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

7. a. $R^2=I_n$ donne $det(R)^2=1$ et donc $det(R)\neq 0$. R est donc inversible.
   b. X^2-1 est un polynôme annulateur de R. Comme il est scindé à racines simples, R est diagonalisable et le valeurs propres de R sont racines de X^2-1 et ne peuvent valoir que 1 ou -1. Ainsi, R est semblable à un matrice diagonale où les coefficients diagonaux valent 1 ou -1.

8. En classant les valeurs propres par ordre croissant R est donc semblable à $S_q=\begin{pmatrix}-I_q & (0)\\ (0) & I_{n-q}\end{pmatrix}$, si q est l multiplicité de -1 (en prenant $q=0$ si -1 n'est pas valeur propre)
Ce qui précède montre que $P.S_q.P^{-1}$ est racine carrée de I_n
Réciproquement $R=PS_qP^{-1}$vérifie $R^2=I_n$

$$\boxed{Rac(I_n)=\left\{P.S_q.P^{-1}/\ P\in GL_n(\mathbb{R}),\ \ q\in\{0,\cdots n\}\right\}}$$

9. Il suffit de prendre une matrice réelle diagonale ayant n valeurs propres distinctes dont une strictement négative
La question 2. s'applique alors .
Par exemple $S=diag(-1,0,1,\cdots n-1)$

10. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. A est diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe une matrice orthogonale P et un matrice diagonale D telles que $A = PD\,{}^tP$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres λ_i. Pour que admette des racines carrées il est nécessaire et suffisant que D en admette. Il suffit donc que les termes diagonau soient tous positifs (Ce n'est peut-être pas nécessaire car les valeurs propres ne sont pas deux à deux distinctes)
Or A est positive donc pour toute matrice colonne X ${}^tXAX \geq 0$. En particulier si $X = X_i = (x_{i,j})\ {}_{j=1}^{n}$ est u vecteur propre associé à λ_i alors

$$0 \leq {}^tX_iAX_i = {}^tX_i(\lambda_iX_i) = \lambda_i \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}^2$$

Comme $\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}^2 > 0$ (X est non nul puisque c'est un vecteur propre), on a $\lambda_i \geq 0$. A admet des racines carrée On peut alors poser (en prenant les racine carrées positives des termes diagonaux car on espère avoir une matric positive)

$$R = P.diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}).P^{-1}$$

Comme Pest orthogonale $P^tP = I_n$ et donc $R^2 = PD^tP = A$ et R est racine carrée de A. Enfin, R est positive :e posant $Y = {}^tPX$ on trouve

$$\forall X \quad , \ {}^tXRX = {}^tXPdiag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^tPX = {}^tYdiag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})Y = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}y_j^2$$

et cette quantité est bien positive. On a finalement montré que

$$\boxed{\text{toute matrice symétrique réelle positive admet une racine carrée positive}}$$

Partie II.

- 11. Pour montrer que l'ensemble est fermé, on montre qu'il est stable par passage à la limite. Soit $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit de racines carrées de A qui converge vers R . Par continuité du produit

$$\lim \left(R_n^2\right) = \lim \left(R_n\right)^2 = R^2$$

Or $\left(R_n^2\right)$ est la suite constante A . Donc $R^2 = A$ et donc $R \in Rac\,(A)$

$$\boxed{Rac(A) \text{ est un ensemble fermé}}$$

12.

1. a. On a $S_q^2 = I_2$. Comme pour $q \geq 1$ $N(S_q) = \max(|q|, 1) = q$ quantité non bornée si q décrit $\mathbb{N}$; $Rac(I_2)$ n'est pa borné.
b. On prend par blocs $M_q = \begin{pmatrix} S_q & (0) \\ (0) & I_{n-2} \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que M_q est une racine carrée de I_n dor la norme infini est q non bornée
c. On vient de voir que l'on peut trouver une suite (M_q) de racines carrées de I_n telles que (M_q) n'est pas borné Si, par l'absurde, il existait une norme surmultiplicative $\|.\|$ alors on aurait

$$\forall k, \ \|M_q\|^2 \leq \|M_q^2\| = \|I_2\|$$

Le membre de droite est constant et celui de gauche de limite infinie (par équivalence des normes si $N(S_q)$ tend ve $+\infty$ alors $\|S_q\|$ tend vers $+\infty$). On obtient une contradiction

$$\boxed{\text{il n'existe pas de norme surmultiplicative.}}$$

Partie III

- 13. $*$ Si - est un ouvert non vide pour tout élément x de - on peut trouver un $r > 0$ tel que $B_\infty(x, r)$ soit inclus dans - . Donc x est intérieur à - . L'intérieur de - est donc - .C'est vrai a aussi si - $= \emptyset$

$$\boxed{\text{l'intérieur d'un ouvert est lui même}}$$

$*$ Par définition même $x \in B_\infty(a, r)$ si et seulement si pour tout i $|x_i - a_i| < r$ donc $x_i \in]a_i - r, a_i + r$
$\boxed{B_\infty(a, r) = \prod_{i=1}^{p}]a_i - r, a_i + r[}$

$*$ Soit $G \subset F$. Soit par l'absurde a intérieur à G . il existe $r > 0$ tel que $B_\infty(a, r) \subset G$ .On a donc $B_\infty(a, r) \subset$ et donc a est intérieur à F ce qui est absurde

Si F est d'intérieur vide tout sous ensemble de F est d'intérieur vide

- 14. a. Le seul polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul.

  b. Dans le plan $(0, x_1, x_2)$, $2x_1 - x_2 = 1$ est l'équation d'une droite. $Z(P)$ est donc infini. $x_1^2 - x_2 = 0$ est l'équation d'une parabole et $Z(Q)$ est aussi infini.

15. a.

  * Le résultat pour $p = 1$ a été justifié en question $14.a$.

  * Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $p \geq 1$. Soit alors P une fonction polynômiale qui s'annule su $I_1 \times \ldots \times I_{p+1}$ où chaque I_k est une partie infinie de $\mathbb{R}$.
    Si on considère $x_1, \ldots, x_p$ fixés quelconques dans I_i et x_{p+1} variable on est amené à considérer P comme un fonction polynômiale de x_{p+1} seul

$$\phi(x_{p+1}) = \sum_{i=0}^{N} \phi_i(x_1, \cdots x_p) x_{p+1}^i$$

    ϕ est une fonction polynômiale qui s'annule en une infinité de points. D'après l'initialisation, c'est le polynôm nul. On a donc

$$\forall i \in \{1, .., N\},\ \forall (x_1, \ldots, x_p) \in I_1 \times \ldots \times I_p,\ \phi_i(x_1, \ldots, x_p) = 0$$

    Or pour tout i ϕ_i est un polynôme. Par l'hypothèse de récurrence chaque ϕ_i est le polynôme nul et donc aus P.

  * On a ainsi prouvé le résultat au rang $p + 1$.

  b. D'après la question $13.a$, toute partie d'intérieur non vide contient une sous-partie $\prod I_k$ où chaque $I_k =]a_i - r, a_i + r[$ est de cardinal infini. . Si P s'annule sur une telle partie P est nul d'après la question précédente.

  c. En prenant la contraposée

$$\boxed{\text{si } P \neq 0 \text{ alors } Z(P) \text{ est d'intérieur vide}}$$

16. a. Si $R = (r_{i,j})$ alors R^2 est une matrice dont les coefficients sont $\sum_{k=1}^{n} r_{i,k} r_{k,j}$
    On a donc $R^2 = A$ si et seulement si pour tout i et pour tout j

$$\sum_{k=1}^{n} r_{i,k} r_{k,j} = a_{i,j}$$

    Considérons alors

$$Q_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} x_{k,j} \right) - a_{i,j}$$

    Chaque $Q_{i,j}$ est un polynôme non nul ayant au plus n^2 variables. On a donc $Z(Q_{i,j})$ d'intérieur vide.

  * Par définition de $Rac(A)$, on a

$$Rac(A) = \cap Z(Q_{i,j}) \subset Z(Q_{i,j})$$

  b. Comme sous ensemble d'une partie d'intérieur vide, $Rac(A)$ est d'intérieur vide avec la question 13.