

ERREUR D'ÉNONCÉ: n doit être non nul (et $n \geq 2$ aurait été préférable pour la partie IV).

Partie I

1. Par développement par rapport à la première ligne, on obtient $\det C_P = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$. Donc C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2. En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\begin{aligned} \chi_{C_P} &= \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -X & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X - a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (-X - a_{n-1}) \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & -X \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+k+1}(-a_k) \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -X & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -X & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1}(-a_0) \begin{vmatrix} 1 & -X & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -X \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-X - a_{n-1})(-X)^{n-1} + \cdots + (-1)^{n+k+1}(-a_k)(-X)^k + \cdots + (-1)^{n+1}(-a_0) \\ &= (-1)^n \left[X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_kX^k + \cdots + a_0 \right] \\ \text{soit } \underline{\chi_{C_P} = (-1)^n P}. \end{aligned}$$

3. Si $Q = \chi_A$ alors $\deg Q = n$ et son coefficient dominant est $(-1)^n$. Réciproquement, si $\deg Q = n$ et son coefficient dominant est $(-1)^n$, posons $P = (-1)^n Q$: on a alors $Q = \chi_{C_P}$ d'après [4].

Il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q = \chi_A$ si et seulement si Q a pour terme de plus haut degré $(-1)^n X^n$.

4. a. $\chi_{C_P} = \chi_{C_P}$ donne $\text{Sp}({}^t C_P) = \text{Sp}(C_P)$.

$$\begin{aligned}
\text{b. } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}({}^tC_P - \lambda I_n) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \lambda x_1 = x_2 \\ \lambda x_2 = x_3 \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} = x_n \\ \lambda x_n = -a_0 x_1 - \cdots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ 0 = P(\lambda) x_1 \end{cases} \\
\text{et on a } P(\lambda) = 0 \text{ donc } \text{Ker}({}^tC_P - \lambda I_n) &= \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- c. Si P est scindé à racines simples alors $\chi_{{}^tC_P}$ aussi et donc tC_P est diagonalisable. Réciproquement, si tC_P est diagonalisable alors $\chi_{{}^tC_P}$ est scindé donc P aussi et, pour tout λ racine de P , on a $\lambda \in \text{Sp}({}^tC_P)$ et la multiplicité de λ est égale à $\dim(\text{Ker}({}^tC_P - \lambda I_n))$. Or, on a vu au [b] que $\dim(\text{Ker}({}^tC_P - \lambda I_n)) = 1$. Donc P est scindé à racines simples. Ainsi tC_P est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.

- d. $\diamond$ Puisque $\deg P = n$, si P a n racines deux à deux distinctes alors P est scindé à racines simples et donc [c] donne tC_P est diagonalisable.

$\diamond$ La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \right)$ est formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres

distinctes. Elle est donc libre et donc on a bien :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

5. a. Prenons $n = 2002$, $P = X^{2002} - X^{2001} - X^{2000} - 1999$ et $A = C_P$.

On a $\chi_A = P$ et le théorème de Cayley-Hamilton donne $P(A) = O$.

REMARQUE: Comme $P(0) = 0$ et $P(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, P a au moins une racine α dans $\mathbb{R}$ donc dans $\mathbb{K}$ et, pour tout n , la matrice $A = \alpha I_n$ vérifie l'équation.

- b. Puisque $f^{n-1} \neq 0$, on a $\text{Ker } f^{n-1} \neq E$ et on peut fixer $e \in E \setminus \text{Ker } f^{n-1}$ puis poser, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_k = f^{k-1}(e)$. Montrons que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E : si il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq$

$(0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \vec{0}$, posons $r = \text{Min}\{k \mid \lambda_k \neq 0\}$; on a alors

$$\begin{aligned} \vec{0} &= f^{n-r} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right) = f^{n-r} \left(\sum_{k=r}^n \lambda_k e_k \right) = \sum_{k=r}^n \lambda_k f^{n-r+k-1}(e) \\ &= \lambda_r f^{n-1}(e) + f^n \left(\sum_{k=r+1}^n \lambda_k f^{k-r}(e) \right) = \lambda_r f^{n-1}(e) \end{aligned}$$

donc, puisque $f^{n-1}(e) \neq \vec{0}$, $\lambda_r = 0$ ce qui contredit la définition de r . Donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E donc une base de E et, pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f(e_k) = f^k(e) = e_{k+1}$ et $f(e_n) = f^n(e) = \vec{0}$.

Donc il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} = C_{X^n}$.

Partie II

6. On a $\lambda X = AX$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda x_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ donc $|\lambda x_i| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \|X\|_\infty$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|\lambda x_i| \leq r_i \|X\|_\infty$.

7. Appliquons le résultat de [6] à i_0 tel que $|x_{i_0}| = \|X\|_\infty$, on obtient $|\lambda| \|X\|_\infty \leq r_{i_0} \|X\|_\infty$ donc, puisque $X \neq \vec{0}$, $|\lambda| \leq r_{i_0}$ donc $\lambda \in D_{i_0}$.

Ainsi $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $\exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda \in D_{i_0}$ donc $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k$.

8. On a vu au [2] que les racines de P sont les valeurs propres de C_P et on peut appliquer [7] à $A = C_P$ avec $r_1 = |a_0|$ et pour $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $r_i = 1 + |a_{i-1}|$. Or, $\bigcup_{k=1}^n D_k$ est le disque fermé de centre 0 et de rayon $\text{Max}_{1 \leq i \leq n} r_i$ donc toutes les racines de P appartiennent à $B_f(0, R)$ où $R = \text{Max}\{|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$.

9. Pour fixer les idées, supposons que $a = \text{Max}\{a, b, c, d\}$. Si $n \in \mathbb{N}$ est solution de l'équation proposée, il est racine de $P = X^a + x^b - X^c - X^d \in \mathbb{C}_a[X]$ donc, avec les notations de [8], on a $|n| \leq R$ avec $R = 2$ car $|a_0| = 0$ et $1 + |a_k| = \begin{cases} 2 & \text{si } k \in \{b, c, d\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Mais, si 2 était solution, on aurait, en supposant, par exemple, $c > d$, $2^b (2^{a-b} + 1) = 2^d (2^{c-d} + 1)$ donc, par unicité de la décomposition en produit de nombres premiers, $b = d$ ce qui est exclu. 0 et 1 étant clairement solutions, on peut conclure que : les seules solutions $n \in \mathbb{N}$ de $n^a + n^b = n^c + n^d$ sont 0 et 1.

REMARQUE: Plus simplement, si $n \neq 0$ est solution de l'équation, en notant $m = \text{Min}\{a, b, c, d\}$, on a $n^{a-m} + n^{b-m} = n^{c-m} + n^{d-m}$ donc, modulo n , $1 \equiv 0$ ce qui donne $n = 1$.

Partie III

10. Si $\forall n, u(n) = \lambda^n$ alors $\forall n, u(n+p) + a_{p-1}u(n+p-1) + \dots + a_0u(n) = \lambda^n (\lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_0) = \lambda^n P(\lambda)$. Donc la suite $n \mapsto \lambda^n$ appartient à F si et seulement si λ est racine de P .
11. $\diamond \varphi$ est clairement linéaire et soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, il existe une et une seule suite $u \in F$ telle que $\varphi(u) = \alpha$: c'est la suite définie par $u(0) = \alpha_0, \dots, u(p-1) = \alpha_{p-1}$ et, pour $n \geq p$, $u(n) = -a_{p-1}u(n-1) - \dots - a_0u(n-p)$. Donc φ est bijective et donc φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{C}^p$.
 $\diamond$ On a donc $\dim F = \dim \mathbb{C}^p$ soit $\dim F = p$.
12. a. $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \dots - a_i e_i(i) - \dots - a_0 e_i(0)$ donc $e_i(p) = -a_i$.
- b. Notons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$. On a $e_i = \varphi^{-1}(\varepsilon_{i+1})$ donc la famille $(e_0, \dots, e_{p-1})$ est l'image par l'isomorphisme φ^{-1} de la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Ainsi $(e_0, \dots, e_{p-1})$ est une base de F .
- c. $\forall u \in F, u = \varphi^{-1}[\varphi(u)] = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=0}^{p-1} u(i) \varepsilon_{i+1}\right] = \sum_{i=0}^{p-1} u(i) \varphi^{-1}(\varepsilon_{i+1})$ donc $\forall u \in F, u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i) e_i$.
13. $f \in \mathcal{L}(E)$ est évident et si $u \in F, \forall n, u(n+1+p) = -a_{p-1}u(n+1+p-1) - \dots - a_0u(n+1)$ soit $f(u)(n+p) = -a_{p-1}f(u)(n+p-1) - \dots - a_0f(u)(n)$ donc $f(u) \in F$ ce qui montre que F est stable par f .
14. Pour $u \in F, f(u) \in F$ donc [13.c] donne $f(u) = \sum_{k=0}^{p-1} f(u)(k) e_k = \sum_{k=0}^{p-1} u(k+1) e_k = \sum_{k=0}^{p-2} u(k+1) e_k + u(p) e_{p-1} = u(1) e_0 + \sum_{k=1}^{p-1} u(k) e_{k-1} + u(p) e_{p-1}$. En particulier, $f(e_i) = \begin{cases} e_{i-1} - a_i e_{p-1} & \text{si } 1 \leq i \leq p-1 \\ -a_0 e_{p-1} & \text{si } i = 0 \end{cases}$
donc $\text{Mat}(f, (e_0, \dots, e_{p-1})) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{p-1} \end{pmatrix} = {}^t C_P$.
15. a. D'après [4.d], une base de vecteurs propres pour ${}^t C_P$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \right)$ donc une base de vecteurs propres pour g est $(v_0, \dots, v_{p-1})$ avec $v_i = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_i^k e_k$. Mais la suite $w_i : n \mapsto \lambda_i^n$ appartient à F d'après [10] et s'écrit $w_i = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_i^k e_k$.
Donc une base de vecteurs propres pour g est $(v_0, \dots, v_{p-1})$ avec $\forall n, v_i(n) = \lambda_i^n$.
- b. Donc $\forall u \in F, \exists (k_0, \dots, k_{p-1}) \in \mathbb{C}^p, u = \sum_{i=0}^{p-1} k_i v_i$ soit $\exists (k_0, \dots, k_{p-1}) \in \mathbb{C}^p, \forall n \in \mathbb{N}, u(n) = \sum_{i=0}^{p-1} k_i \lambda_i^n$.
16. Ici, $P = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc = (X-a)(X-b)(X-c)$ avec a, b, c distincts (l'hypothèse "non nulles" ne sert pas) donc [15] donne : une base de F est $((a^n)_{n \in \mathbb{N}}, (b^n)_{n \in \mathbb{N}}, (c^n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Partie IV

17. Non (si $n \geq 2$) car $\text{rg}(C_A) \geq n-1$ donc si $\text{rg}(A) < n-1$ alors A ne saurait être semblable à C_A (si $n = 1$, $A = C_A$). On peut aussi, selon [4.c], prendre A diagonalisable mais avec une valeur propre au moins double.

18. Si on a $(**)$ alors $U - V = P^{-1}(C_U - C_V)P$. Or, les $(n-1)$ premières colonnes de $C_U - C_V$ sont nulles donc $\text{rg}(C_U - C_V) \leq 1$ et si on avait $\text{rg}(C_U - C_V) = 0$ alors $C_U - C_V = 0$ donc $U - V = 0$ ce qui est exclu (U et V distinctes) donc $\text{rg}(C_U - C_V) = 1$. Donc $\text{rg}(U - V) = 1$. On a donc montré que $(**) \implies (*)$.

19. $U = I_2$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifient $(*)$ mais pas $(**)$ et on a $\text{PGCD}(\chi u, \chi v) = X^2 - 1$.

On a bien $\text{rg}(U - V) = 1$ et, d'autre part $\chi_U = \chi_V$ donc $C_U = C_V$ et, si on avait $(**)$, on aurait $U = V$ ce qui n'est pas.

20. $\text{rg}(u-v) = \text{rg}(U-V) = 1$ et le théorème du rang donne $\dim(\text{Ker}(u-v)) = n-1$: H est un hyperplan de E .

21. a. Si on avait $F \subset H$ alors $\forall x \in F$, $(u-v)(x) = \vec{0}$ donc $\forall x \in F$, $u(x) = v(x)$ c'est à dire que $u_F = v_F$. On a donc $\chi_{u_F} = \chi_{v_F}$. Posons $P = \chi_{u_F} = \chi_{v_F}$, on a $\deg P = \dim F \geq 1$ et P divise χu et χv ce qui contredit $\text{PGCD}(\chi u, \chi v) = 1$. Donc $F \not\subset H$.

b. $\diamond$ On a donc $F \neq F \cap H$ donc $\dim F > \dim(F \cap H)$ et donc $\dim(F+H) = \dim H + \dim F - \dim(F \cap H) > \dim H = n-1$ donc $\dim(F+H) = n$ et $F+H = E$.

$\diamond$ Notons $p = \dim F$. Soit $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F , $\mathcal{B}_H = (v_1, \dots, v_{n-1})$ une base de H .

Tout élément de E s'écrit $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j v_j$ donc $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_{n-1})$ est génératrice de E et

$(u_1, \dots, u_p)$ est libre donc le théorème de la base incomplète montre qu'on peut compléter $\mathcal{B}_F$ par des vecteurs de H en une base $\mathcal{B}'$ de E .

$\diamond$ On a donc $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ avec $u_k \in H$ pour $k \geq p+1$. Or, si $x \in H$, $u(x) = v(x)$ et F est stable par u et par v donc on a

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}') = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline O & C \end{array} \right) \quad \text{Mat}(v, \mathcal{B}') = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & B \\ \hline O & C \end{array} \right) \quad \text{avec } A_i \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Donc $\chi_C \mid \chi_U$, $\chi_C \mid \chi_V$ et $\deg(\chi_C) = n-p \geq 1$ puisque $F \neq E$, ce qui contredit $\text{PGCD}(\chi u, \chi v) = 1$. Donc $F = E$.

c. $\{\vec{0}\}$ et E sont stables par u et par v et on vient de montrer que si F est stable par u et par v et $F \neq \{\vec{0}\}$ alors $F = E$. Donc les seuls sous-espaces stables par u et par v sont E et $\{\vec{0}\}$.

22. a. Par définition, $G_j = (u^j)^{-1}(H)$ et $U \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $u \in \text{GL}(E)$ et donc $u^j \in \text{GL}(E)$ donc $\dim G_j = \dim H$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, G_j est un hyperplan de E .

b. On a donc $G_j = \text{Ker } \varphi_j$ où φ_j est une forme linéaire non nulle sur E . On a alors $\dim \left[\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \right] =$

$$\dim \left[\bigcap_{j=0}^{n-2} \text{Ker } \varphi_j \right] = n - \text{rg}(\varphi_0, \dots, \varphi_{n-2}) \geq n - 2n - (n-1) = 1. \text{ Donc } \underline{\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{\vec{0}\}}.$$

c. Supposons le résultat faux et considérons comme le suggère l'énoncé, $F = \text{Vect} \{y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\}$ où p est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$ est libre qui est bien défini car $\{k \geq 1 \mid (y, u(y), \dots, u^{k-1}(y)) \text{ est non vide}\}$ est non vide car (y) est libre et majoré par $n-1$. Par définition

de p , $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$ est libre et $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y), u^p(y))$ est liée donc $\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $u^p(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(y)$. Ceci montre que $u^p(y) \in F$ et donc $u(F) = \text{Vect} \{u(y), u^2(y), \dots, u^p(y)\} \subset F$. D'autre part, $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $y \in G_i$ donc $u^k(y) \in H$ et donc $v(u^k(y)) = u(u^k(y))$ donc, puisque $p-1 \leq n-2$, $v(F) = \text{Vect} \{u(y), u^2(y), \dots, u^p(y)\} = u(F) \subset F$. On a donc F stable par u et par v avec $1 \leq \dim F \leq n-1$ ce qui est impossible d'après [21]. Donc $\mathcal{B}''$ est une base de E .

- d. On a $u(e_k) = e_{k+1}$ pour $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ donc $\text{Mat}(u, \mathcal{B}'') = C_P$ où $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} e_k^*(u(e_{n-1})) X^k$. Mais alors, d'après [2], $P = (-1)^n \chi_u$ donc $C_P = C_U$. D'autre part, comme vu au [c], $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $v(e_k) = u(e_k) = e_{k+1}$ donc $\text{Mat}(v, \mathcal{B}'')$ est aussi une matrice compagnon et, de même que ci-dessus, c'est C_V . On a donc $\text{Mat}(u, \mathcal{B}'') = C_U$ et $\text{Mat}(v, \mathcal{B}'') = C_V$.

- e. En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}''$ à $\mathcal{B}$, on a donc $U = P^{-1} C_U P$ et $V = P^{-1} C_V P$. On peut donc conclure que : $\forall (U, V) \in (\text{GL}_n(\mathbb{K}))^2$, $\left((*) \text{ et } \text{PGCD}(\chi_U, \chi_V) = 1 \right) \implies (**)$.

23. On a bien : $(u, v) \in (\text{GL}(E))^2$ (car $\chi_u(0) \neq 0$ et $\chi_v(0) \neq 0$), $\text{PGCD}(\chi_u, \chi_v) = 1$ (car si $P \mid \chi_u$ et $P \mid \chi_v$ alors $P \mid \chi_u - \chi_v = 2(-1)^n$ et $\text{rg}(u - v) = 1$). On peut donc appliquer le résultat de [22] à (u, v) : il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = C_U = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}(v, \mathcal{B}'') = C_V = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le sous-groupe G de $\text{GL}(E)$ engendré par u et v est $G = \{w_p \circ \cdots \circ w_1 \mid p \in \mathbb{N}^*, w_i \in \{u, v, u^{-1}, v^{-1}\}\}$. Mais le théorème de Cayley-Hamilton donne $v^n = \text{Id}_E$ et $u^n = -\text{Id}_E$ donc $u^{2n} = \text{Id}_E$ donc $v^{-1} = v^{n-1}$ et $u^{-1} = u^{2n-1}$ donc $G = \{w_p \circ \cdots \circ w_1 \mid p \in \mathbb{N}, w_i \in \{u, v\}\}$.

Posons $X = \{e_1, \dots, e_n, -e_1, \dots, -e_n\}$ de cardinal $2n$ (car $e_i = \varepsilon e_j$ n'est possible que pour $i = j$ et $\varepsilon = 1$ par liberté de $\mathcal{B}$) et montrons que $\forall (g, x) \in G \times X$, $g(x) \in X$ par récurrence sur p si $g = w_p \circ \cdots \circ w_1$ avec $w_i \in \{u, v\}$. Pour $p = 0$, $g = \text{Id}_E$ et le résultat est vrai et si il est vrai pour $g = w_p \circ \cdots \circ w_1$ alors, pour $h = w_{p+1} \circ w_p \circ \cdots \circ w_1 = w_{p+1} \circ g$, on a $h(x) = w_{p+1}(g(x))$ avec $w_{p+1} \in \{u, v\}$ et $g(x) \in X$ et, comme $u(e_i) = v(e_i) = e_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $u(e_n) = -v(e_n) = -e_1$, on a bien $x \in X \implies h(x) \in X$. Ainsi, on peut définir $*$: $G \times X \longrightarrow X$.

$$(g, x) \longmapsto g * x = g(x)$$

On a clairement $\forall x \in X$, $\text{Id}_E * x = x$ et $\forall (g, h) \in G^2$, $\forall x \in X$, $g * (h * x) = (g \circ h) * x$ donc $*$ est une opération de G sur X (d'ailleurs $*$ n'est rien d'autre qu'une restriction de l'action canonique de $\text{GL}(E)$ sur E). On sait qu'alors il existe un morphisme $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ de noyau $\text{Ker } \varphi = \{g \in G \mid \forall x \in X, g(x) = x\}$. Mais, ici, si $g \in \text{Ker } \varphi$, on a, en particulier, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(e_i) = e_i$ donc $g = \text{Id}_E$ ce qui prouve que φ est injective donc G est en bijection avec $\varphi(G) \subset \mathfrak{S}(X)$ et comme $\text{card}(\mathfrak{S}(X)) = (2n)!$, G est fini et $\text{card}(G) \leq (2n)!$.

REMARQUE: Une application linéaire étant caractérisée par l'image d'une base, G est en bijection avec $G' = \{(g(e_1), \dots, g(e_n)) \mid g \in G\}$. Posons σ la permutation circulaire $(1, 2, \dots, n)$ et montrons que $G' = G''$ où $G'' = \{(\varepsilon_1 e_{\sigma^k(1)}, \dots, \varepsilon_n e_{\sigma^k(n)}) \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}$.

L'inclusion $G' \subset G''$ se montre par récurrence comme ci-dessus car $(w(\varepsilon_1 e_{\sigma^k(1)}), \dots, w(\varepsilon_n e_{\sigma^k(n)})) = (\pm \varepsilon_1 e_{\sigma^{k+1}(1)}, \dots, \pm \varepsilon_n e_{\sigma^{k+1}(n)})$ pour $w = u$ ou $w = v$ et que σ est d'ordre n .

Réciproquement, on a par récurrence facile sur k , $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(v^k(e_1), \dots, v^k(e_n)) = (e_{\sigma^k(1)}, \dots, e_{\sigma^k(n)})$ et $(u^k(e_1), \dots, u^k(e_n)) = (e_{\sigma^k(1)}, \dots, e_{\sigma^k(n-k)}, -e_{\sigma^k(n-k+1)}, \dots, -e_{\sigma^k(n)})$. Posons $g_k = v^k \circ u^{n-k}$ ($g_0 = -\text{Id}_E$, $g_n = \text{Id}_E$), on a donc $(g_k(e_1), \dots, g_k(e_n)) = (e_1, \dots, e_k, -e_{k+1}, \dots, -e_n)$ et donc, en posant,

pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $h_k = g_{k-1} \circ g_k$, $(h_k(e_1), \dots, h_k(e_n)) = (e_1, \dots, e_{k-1}, -e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$. On obtient ainsi $(\varepsilon_1 e_{\sigma^k(1)}, \dots, \varepsilon_n e_{\sigma^k(n)}) = (g(e_1), \dots, g(e_n))$ en prenant $\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon_i = 1 \\ 1 & \text{si } \varepsilon_i = -1 \end{cases}$ et $g = v^k \circ h_1^{\alpha_1} \circ \dots \circ h_n^{\alpha_n}$ et on a $g \in G$. Donc $G'' \subset G'$ et, finalement, $\text{card}(G) = \text{card}(G'')$ soit $\text{card}(G) = n 2^n$.