Concours Communs Polytechniques - Session 2014

Corrigé de l'épreuve de mathématiques 2
Filière MP

Daigonalisation, projecteurs, matrices symétriques

Corrigé par M.TARQI [1]-htpp :// alkendy.x10.mx

Exercice 1

1. a) La matrice A étant symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = -(X-1)(X-6)(X+4)$, donc les valeurs propres de A sont 1, 6 et -4. La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, à la base de vecteurs propres est donnée par $P = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$, d'où :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} + \frac{9}{50}6^n + \frac{9}{50}(-4)^n & \frac{3}{10}6^n - \frac{3}{10}(-4)^n & \frac{-12}{25} + \frac{6}{25}6^n + \frac{6}{25}(-4)^n \\ \frac{3}{10}6^n - \frac{3}{10}(-4)^n & \frac{1}{2}6^n + \frac{1}{2}(-4)^n & \frac{2}{5}6^n - \frac{2}{5}(-4)^n \\ \frac{-12}{25} + \frac{6}{25}6^n + \frac{6}{25}(-4)^n & \frac{2}{5}6^n - \frac{2}{5}(-4)^n & \frac{9}{25} + \frac{8}{25}6^n + \frac{8}{25}(-4)^n \end{pmatrix}$$

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Le système précédent s'écrit donc $X_{n+1} = AX_n$ ou encore $X_n = A^nX_0$, d'où les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n = \frac{4}{25} + \frac{21}{50}6^n + \frac{21}{50}(-4)^n \\ v_n = \frac{7}{10}6^n - \frac{7}{10}(-4)^n \\ w_n = \frac{-3}{25} + \frac{14}{25}6^n + \frac{14}{25}(-4)^n \end{cases}$$

Exercice 2

1. a) D'après le théorème du rang il suffit de montrer que $\ker p \cap \mathrm{Im} p = \{0\}$. Soit $y \in \ker p \cap \mathrm{Im} p$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ et $p(y) = 0$, donc $0 = p(p(x)) = p(x) = y$. D'où le résultat.

b) Soit r le rang p et $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im} p \oplus \ker p$ ($(e_1, ..., e_r)$ une base de $\mathrm{Im} p$ et $(e_{r+1}, ..., e_n)$ une base de $\ker p$). Dans cette base la matrice de p est de la forme $M = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où I_r la matrice unité d'ordre r. Donc $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(M) = r = \mathrm{rg}\, p$.

1. tout commentaire, toute remarque ou éventuelle rectification, concernant ce corrigé, seront les bienvenus

c) Un endormorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$ n'est pas nécessairement un projecteur, en effet, par exemple l'endomorphisme u associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u) = 3$, mais u n'est pas un projecteur puisque $A^2 \neq A$.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, car $A^2 = A$ (A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$).

La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, car $A^2 = 0$ (0 la seule valeur propre de A).

3. a) Soient e_n un vecteur non nul de E tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_n)$ et $(e_1, e_2, ..., e_{n-1})$ un base de $\ker u$, alors $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n)$ est une base de E. Posons $u(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, donc

$$Mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

b) On a $\dim \ker u = n - 1$, donc 0 est une valeur propre de u. Donc 0 racine de χ_u d'ordre supérieure ou égal à $n-1$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_u = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda)$, donc $\lambda = \mathrm{Tr}(u)$. Ainsi u est digonalisable si et seulement si, $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$.

c) D'après ce qui précède u est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(u) = \{0, 1\}$. Donc le polynôme minimal vaut $X(X-1)$, ce qui donne $u^2 = u$, c'est à dire u est un projecteur.

d) On a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rg}(A) = 1$, donc A représente un projecteur p de $\mathbb{R}^3$. Il est clair que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ et $\ker p = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + e_3)$ où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Problème

Questions préliminaires

1. a) Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique. Alors il existe une base orthonormale de vecteurs propres de u, de plus ses valeurs propres sont réelles.
Pour toute matrice symétrique A il existe une matrice orthogonal P (${}^tPP = I_n$) et une matrice D diagonale réelle telle que $D = {}^tPAP$

b) Le théorème précédent n'est pas valable sur $\mathbb{C}$, par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$

est symétrique non diagonalisable (le polynôme minimal $\pi_A = X^2$).

2. a) Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$ la décomposition de x dans la base $\mathscr{B}$. Alors

$$R_s(x) = (s(x)|x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i | \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

b) Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$ un vecteur unitaire ($\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$), alors l'égalité précédente montre que

$$\lambda_1 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n,$$

et donc

$$R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n].$$

3. a) Soit x un vecteur propre associé à une valeur propre λ d'un endomorohisme s symétrique positif (resp. symétrique défini positif), puisque $x \neq 0$, $(x|x) > 0$ d'où :

$$(x|u(x)) = \lambda(x|x)$$

ou encore $\lambda = \frac{(x|s(x)}{(x|x)} \geq 0$. (resp. $\lambda = \frac{(x|s(x)}{(x|x)} > 0$).

b) Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $s(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$ et donc $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$ $s_{ij} = (s(e_i)|e_j)$, en particulier $s_{ii} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$ (d'après la question 2.b).

Un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

4. Notons l l'application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ définie par $l(A) = (A, A)$ et b l'application bilinéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b(A, B) = {}^tAB$. Les deux applications sont continues puisque on est en dimension finie. Notons $\varphi : M \mapsto {}^tMM - I_n$, alors $\varphi = b \circ l - c$ où c est l'application constante : $M \mapsto I_n$, donc φ est continue.
5. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc${}^tAA = I_n$ et par conséquent $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

En particulier, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 1$ et donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ki}| \leq \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 1$.
6. On a $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}\{I_n\}$, donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
D'autre part, considérons la norme $\|.\|_\infty$ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\|A\|_\infty = \|(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$. La question précédente montre que $\forall A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty \leq 1$, donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_\infty$ et comme la dimension est finie la partie $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée pour toute norme.
En conséquence $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte comme fermée bornée d'un espace de dimension finie.

7. a) On sait qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = P\Delta^t P$, donc $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(AP\Delta^t P) = \mathrm{Tr}(PA^t P\Delta)$, donc il suffit de prendre $B = {}^t PAP \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

   b) L'application T est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, car il s'agit d'une application linéaire. Comme $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact, alors T est bornée et atteint ses bornes sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, en particulier elle atteint son maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

   c) Posons $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $\Delta = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On a $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}d_{ki}$. Or $|b_{ik}| \leq 1$ car $B \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, donc

$$\mathrm{Tr}(AS) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}d_{ki} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ki} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S).$$

   D'où $\forall A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}), T(A) \leq \mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$. Ceci montre que le maximum est atteint au point $I_n \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$:

$$t = \sup_{A\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})} T(A) = \mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Inégalité d'Hadmard

8. L'inégalité arithmético-géométrique se traduit par l'inégalité $\det(S) \leq \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S)\right)^n$ avec $a_i = \lambda_i$.

9. On a ${}^t S_\alpha = S_\alpha$ et $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X^t DSDX = {}^t(DX)S(DX) \geq 0$, donc $S_\alpha \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. On trouve $S_\alpha = (a_i a_j s_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, donc $\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 s_{ii}$.

10. On applique l'inégalité $(*)$ à S_α :

$$\det(S_\alpha) \leq \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S_\alpha)\right)^n.$$

Mais, dans ces conditions, $\mathrm{Tr}(S_\alpha) = n$ et $\det(S_\alpha) = \det(S)\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{s_{ii}}\right)$, d'où :

$$\det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}.$$

11. On peut vérifier facilement que $S_\varepsilon \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs, donc on peut appliquer le résultat de la question 10. :

$$\det S_\varepsilon \leq \prod_{i=1}^{n}(s_{ii} + \varepsilon).$$

Montrons d'abord que l'application $\det$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, en effet, soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $A = (C_1, C_2, ..., C_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($C_1, ..., C_n$ désignent les colonnes de A), alors $\det A = \det_{\mathscr{B}}(C_1, C_2, ..., C_n)$, donc $\det$ parait comme composée d'applications continues : l'application linéaire l de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $(\mathbb{R}^n)^n$ définie par $l(A) = (C_1, C_2, ..., C_n)$ et l'application multilinéaire $\det_{\mathscr{B}}$. Donc $\det$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, par passage à la limite quand ε tend vers 0, on obtient $\det S \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$ ou encore

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii},$$

puisque $\det S = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

12. Il est clair que B est symétrique positive, et comme A et B son semblables alors elles ont les mêmes valeurs propres donc $B \in \mathscr{U}$.
    Comme dans la question 7.a), $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$.
13. Soit $t \in \{\mathrm{Tr}(AS)/A \in \mathscr{U}\}$, alors il existe $A \in \mathscr{U}$ tel que $t = \mathrm{Tr}(AS)$ et donc $t = \mathrm{Tr}(B\Delta)$ avec $B \in \mathscr{U}$. Donc $\{\mathrm{Tr}(AS)/A \in \mathscr{U}\} \subset \{\mathrm{Tr}(B\Delta)/B \in \mathscr{U}\}$, de même on montre l'inclusion inverse, d'où l'égalité :
    $$\{\mathrm{Tr}(AS)/A \in \mathscr{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta)/B \in \mathscr{U}\}.$$
    Soit $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{U}$, alors $\mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\Delta_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii} \geq 0$ (les b_{ii} sont positifs d'après 3. b)). Donc le minimum existe.
14. D'après la question précédente et l'inégalité arithmético-géométrique, on a :
    $$\mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii} \geq n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{i=1}^{n} b_{ii}\right)^{\frac{1}{n}}.$$
15. D'après l'inégalité d'Hadmard, appliquée à B, on a $\prod_{i=1}^{n} b_{ii} \geq \det B = 1$, donc
    $$\mathrm{Tr}(B\Delta) \geq n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} = n(\det S)^{\frac{1}{n}}.$$
16. On remarque que $D \in \mathscr{U}$ et que $D\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, ..., \lambda_n\mu_n)$. D'autre part, $\mathrm{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mu_i = n\det(S)^{\frac{1}{n}}$. Ainsi on a montré que pour tout $B \in \mathscr{U}$,
    $$\mathrm{Tr}(B\Delta) \geq \mathrm{Tr}(D\Delta).$$
    Ceci montre que la borne inférieure m est atteint au point D et que $m = n\det(S)^{\frac{1}{n}}$.

• • • • • • • • • • •