Concours communs polytechniques - Session 2014

Épreuve spécifique-Filière MP

Mathématiques I

Durée 4 heures

••••••••••••

Exercice 1

On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$, calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$

Exercice 2

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle :

$$(E) : \quad x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Donner la dimension des espaces S^+ et S^-.

2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J.
Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leq 4$.

3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E) : \quad x^2y'' + xy' = 0.$$

Determiner S^+ et S^-.
Determiner ensuite S et donner sans détails la dimension de S .

4. Dans cette question $(E) : \quad : x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.
Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel).
En déduire S^+ puis S^-.
Determiner S et donner la dimension de S.

5. Donner un exemple d'équation différentielle du type

$$(E) : \quad x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).
On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

Problème

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
   En remarquant que, pour $k \geq 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).
2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.
   a) Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.
   b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.
   c) En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.
3. EXEMPLE.
   Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$
   b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.
4. Soit la série de fonction $\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
   Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.
   On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si , les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \mathcal{R}e(u_n)$ et $\sum \mathcal{I}m(u_n)$) convergent.
   On notera U sa fonction somme : pour tout réel x, $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n, $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.
   On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (on dira que la suite (F_n) est uniformément bornée)

a) Démontrer que la suite (a_nF_n) converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur A.

b) A l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_nf_n$ converge uniformément sur A.

6. Exemple.
Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = -2i\sin(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.
En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle
$]0, 2\pi[$.

b) Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel p, la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi[$.
On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration, que $\forall x \in [0, \pi],\ \dfrac{2}{\pi} \leq \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

c) On se propose dans cette question de démontrer que la fonction U n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que la fonction U est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

i. Déterminer alors les coefficients de Fourier de la fonction U.
On pourra utiliser pour p et n entiers naturels non nuls :
$p \neq n$, $\displaystyle\int_0^\pi \sin(nx)\sin(px)dx = 0$ et pour $p = n$, $\displaystyle\int_0^\pi \sin(nx)\sin(px)dx = \frac{\pi}{2}$.

ii. En utilisant la formule de Parseval, aboutir à une contradiction.

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

7. Si $\sum_{n\geq 0} a_nz^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R < 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

8. On considère la série de la variable complexe $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

.0.a On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
Démontrer que la série de la variable réelle $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$ (en particulier la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

a) On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.
pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leq 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathcal{R}e(z \leq \cos\alpha$.
Représenter hermétiquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

b) Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
On pourra écrire :

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq \cos\alpha\}$$

et démontrer que D_α est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.
En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

.0.b On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$.
Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \mathcal{R}e(z)$:

$$|F_n(z)| \leq \frac{2}{1-x} \leq \frac{2}{1-\cos\alpha}$$

c) Démontrer que la série entière $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α (pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

Fin de l'énoncé.