Concours Communs Polytechniques - Session 2013

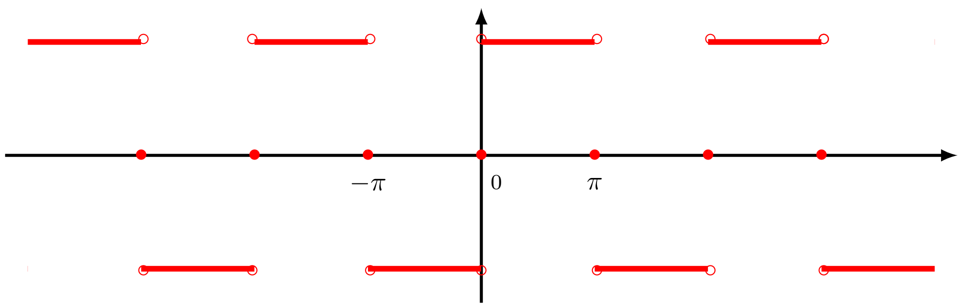
Corrigé de l'épreuve de mathématiques 1
Filière MP

Séries de Fourier, systèmes différentiels et séries entières

Corrigé par M.TARQI [1]-htpp :// alkendy.x10.mx

EXERCICE 1 : UNE SÉRIE DE FOURIER

1.



La courbe représentative de f

La fonction f est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier. La fonction f étant impaire, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)dt = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n].$$

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ b_{2k} = 0 \ \text{ et } \ b_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)}.$$

2. La fonction f est de plus de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de Dirichlet, en tout réel x, la série de Fourier de f converge et a pour pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi,\ \ f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

3. Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, d'après le théorème de Parseval, on a :

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 1.$$

On obtient donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

1. tout commentaire, toute remarque ou éventuelle rectification, concernant ce corrigé, seront les bienvenus

EXERCICE 2 : UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

1. Le polynôme caractéristique de A s'écrit : $\chi_A(X) = X^2 - 4X + 4$. D'après le théorème de Cayley Hamilton on a $A^2 - 4A + 4I_2 = 0$ ou encore $B^2 = (A - 2I)^2 = 0$, donc B est nilpotente.

Par définition, on a :

$$e^{t(A-2I_2)} = e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!} = I_2 + tB = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}.$$

2. La solution générale du système est donnée par la formule $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+3t \end{pmatrix}.$$

PROBLÈME : SÉRIES DE TAYLOR ET DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE

PARTIE PRÉLIMINAIRE

1. La règle de D'Alembert, montre que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nx^{n-1}$ est égale à 1, donc la somme $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ existe et bien définie pour tout $x \in]-1,1[$. D'autre part, on sait que $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nx^{n-1}$ n'est autre que la série dérivée de la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$, d'où :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n-1}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. Par une intégration par parties, on obtient, pour tout $a \in]0,+\infty[$ et tout $x > 0$:

$$\int_0^a t^{x-1}e^{-t}dt = \left[\frac{1}{x}t^x e^{-t}\right]_0^a + \frac{1}{x}\int_0^a t^x e^{-t}dt = \frac{1}{x}a^x e^{-a} + \frac{1}{x}\int_0^a t^x e^{-t}dt.$$

Par conséquent

$$\Gamma(x) = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a t^{x-1}e^{-t}dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!\Gamma(1) = n!$.

3. Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et a et x deux points quelconques de I.

- Si $n = 0$, on a évidemment :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

- Supposons le résultat est à l'ordre $n-1$ et montons le pour n. Par hypothèse on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt.$$

Mais une intégration par parties, donne :

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt &= \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^b + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(t)dt \end{aligned}$$

D'où
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{(n)!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

4. On sait que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc si $x\neq 0$, on obtient :
$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$
Cette égalité reste vraie pour $x=0$, donc f apparaît comme une fonction définie par une série entière de rayon de convergence infinie, donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
5. Si une telle fonction f existe, on aurait nécessairement
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n,$$
pour tout $x\in]-R,R[$ où R est le rayon de convergence la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Donc, d'après la partie préliminaire, la fonction définie sur $]-1,1[$, par $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ répond bien à la question.
6. ***Un théorème des moments***
   a) La fonction f est bien définie et continue sur l'intervalle $[0,1]\subset]-R,R[$ (car $R>1$), donc f est bornée sur $[0,1]$, soit donc $M=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$. D'autre part, on a
   $$\forall x\in[0,1],\ \ |f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n|\leq M\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|,$$
   inégalité qui montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge normalement sur $[0,1]$, car la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge au point $x=1$.
   b) Posons $\forall x\in[0,1]$, $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x)\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. D'après la question 6.(a), la suite de fonction $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x\mapsto f(x)^2$.

   Puisque tout polynôme est combinaison linéaire de monômes, on a pour tout polynôme P, $\int_a^b P(t)f(t)dt=0$, en particulier $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 S_n(t)f(t)dt=0$. On a alors pour $n\in\mathbb{N}$:
   $$0\leq\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\left(f(t)-S_n(t)\right)f(t)dt\leq\|f-S_n\|_\infty\|f\|_\infty$$
   Comme la suite $(\|f-S_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on déduit $\int_0^1 f^2(t)dt=0$, d'où, puisque f est continue sur $[0,1]$, $f=0$.
   c) f étant nulle sur $[0,1]$, donc sa série de Taylor est nulle au voisinage de 0, donc f est nulle sur $]-R,R[$ d'après le rappel.

II. Contre-exemples

7. Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ définie sur $I =]-\infty, 1[$. f est $\mathscr{C}^\infty$ sur I et développable en série entière sur $]-1,1[$, car on sait que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Mais f ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.

8. a) Par parité il suffit d'étudier la fonction sur $[0,+\infty[$. Sur l'intervalle $[0,+\infty[$, f est croissante, tend vers 1 en $+\infty$ et change de concavité au point $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. La construction du graphe ne présente aucune difficulté.

b) Montrons par récurrence la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in]0,+\infty[, \ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

- Pour $n = 0$, la propriété est vraie.
- Pour $n = 1$, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

donc la propriété est vraie pour $n = 2$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc $f^{(n)}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{x^3 P_n'(x) + 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3(n+1)}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

La propriété est donc bien démontré pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Pour tout entier naturel n, $f^{(n)}$ est continue en 0, $f^{(n)}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f^{(n+1)}$ admet 0 pour limite en 0, donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

d) D'après ce qui précède, si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors on peut trouver un voisinage $\mathscr{V}$ de 0 tel que :

$$\forall x \in \mathscr{V}, \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

Donc f est nulle dans un voisinage de 0, ce qui est absurde.

9. a) Posons $g(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 g(t) = 0$, donc g est intégrable sur $[0,+\infty[$.

- $g : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (d'après les théorèmes généraux).
- $\dfrac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \mapsto \dfrac{-2xte^{-t}}{(1+tx^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Par parité il suffit de montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et pour cela il suffit encore de se limiter à des segments $K = [a,b] \subset [0,+\infty[$. On a :

- $\forall x \in [a,b], \ \forall t \geq 0, \ |g(x,t)| \leq \varphi_1(t)$ avec $\varphi_0(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+ta^2}$.
- $\forall x \in [a,b], \ \forall t \geq 0, \ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_2(t)$ avec $\varphi_1(t) = \dfrac{2bte^{-t}}{(1+ta^2)^2}$.

Les deux fonctions dominantes φ_1 et φ_2 sont continues sur $\mathbb{R}^+$. La fonction φ_1 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après ce qui précède et il en est de même de φ_1 car $\varphi_1(t) = o\big(\varphi_0(t)\big)$ au voisinage de $+\infty$.

On vient donc de vérifier toutes les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale. On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = -2x\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1+tx^2)^2}\mathrm{d}t.$$

b) Posons $h_t(x) = \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$. Soit $t \in]0,+\infty[$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ on a $tx^2 < 1$ et donc :

$$h_t(x) = \frac{e^{-t}}{1+tx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n e^{-t} x^{2n}.$$

D'où, par unicité de la décomposition, $h_t^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!t^n e^{-t}$ et $h_t^{(2n+1)}(0) = 0$.
D'autre part, on a :

$$f^{(n)}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(0,t)dt = \int_0^{+\infty} h_t^{(n)}(0)dt.$$

Ainsi, on obtient :

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n(2n)!\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = (-1)^n(2n)!\Gamma(n+1) = (-1)^n(2n)!n! \ \text{ et } \ f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

c) La série obtenu est donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-)^n n! x^{2n}$, dont le rayon de convergence est 0 (la série ne converge que pour $x = 0$). En conséquence la fonction f n'est pas développable en série entière, car sa série de Taylor n'est pas définie sur voisinage de $x = 0$.

III. Condition suffisante

10. a) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-a,a[$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Pour que f soit développable en série entière au voisinage de l'origine il faut et il suffit que $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc, avec les hypothèses de la question, on a :

$$\left|\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\right| \leq M\left|\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\right| = M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (terme général d'une série convergente), ceci permet de conclure.

b) Pour $f(x) = \sin x$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, donc $|\sin^{(n)}(x)| \leq 1$ et donc le résultat de la question précédente s'applique.

••••••••••••