

Concours Communs Polytechniques - Session 2011

Corrigé de l'épreuve d'analyse- Filière MP

Séries entières, équations différentielles et transformée de Laplace

Corrigé par M.TARQI <http://alkendy.x10.mx>

Exercice 1

1. La règle de D'Alembert montre que $R = 1$.
2. On a $\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n + 1}$ et comme les deux séries $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n - 1}$ et $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n + 1}$ ont le même rayon de convergence $R = 1$, alors

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n - 1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n + 1}$$

ou encoure

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad S(x) = -x \ln(1 - x) + \frac{1}{x} (\ln(1 - x) + x + \frac{x^2}{2}) = \frac{1 + x}{x} (1 - x) \ln(1 - x) + 1 + \frac{x}{2},$$

et $S(0) = 0$.

3. Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose $u_n(x) = \frac{2x^n}{n^2 - 1}$, on a $|u_n(x)| \leq \frac{2}{n^2 - 1}$ et comme la série numérique $\sum \frac{2}{n^2 - 1}$ converge, alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[0, 1]$ et comme les fonctions u_n sont continues sur $[0, 1]$, alors la fonction S est continue sur $[0, 1]$, en particulier

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2x^n}{n^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{3}{2}.$$

Exercice 2

1. L'équation différentielle (E) s'écrit encore, pour tout $x > 0$,

$$y' - \frac{3}{2x}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La solution homogène est $y_h(x) = \lambda e^{\frac{3}{2} \ln x} = \lambda x^{\frac{3}{2}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante, en effet $y_p(x) = \lambda(x)x^{\frac{3}{2}}$ est solution de (E) si et seulement si $2x^2 \lambda'(x) = 1$, donc $\lambda(x) = \frac{-1}{2x} + \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$. D'où les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont de la forme : $y(x) = \mu x^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ où $\mu \in \mathbb{R}$.

2. Supposons que (E) admet des solutions sur $[0, +\infty[$ et soit y une parmi elles, alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \mu x^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2}$ pour tout $x > 0$. Mais cette fonction n'est pas dérivable à droite de 0 (une solution de (E) sur $[0, +\infty[$ est une fonction dérivable à droite de 0), ce qui est absurde.

Donc l'ensemble de solutions de (E) sur $[0, +\infty[$ est vide.

Problème

AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

1. Question préliminaire

- (a) $(i) \iff (ii)$
- (b) $(i) \implies (ii)$

Partie I : Exemples et propriétés

- 2. (a) Soient f et g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto (f(t) + \lambda g(t))e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $f + \lambda g \in E$ et par conséquent E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
- (b) Il est clair que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Montrons que $F \subset E$ pour conclure. Soit $f \in F$, alors il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)| \leq M$ et donc

$$\forall x > 0, |f(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$$

et comme la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors il est de même de la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ et donc $f \in E$.

- (c) Pour tout couple $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} (f(t) + \lambda g(t))e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt + \lambda \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt$$

et donc

$$\mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda \mathcal{L}(g)$$

Ainsi $\mathcal{L}$ est linéaire.

- 3. (a) Soit $x > 0$. $\mathcal{L}(U)(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-xt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^A = \frac{1}{x}$
- (b) Soient $x > 0$ et $A > 0$, alors :

$$\int_0^A e^{-\lambda t} e^{-xt} dt = \int_0^A e^{-(\lambda+x)t} dt = \left[\frac{e^{-(\lambda+x)t}}{-\lambda-x} \right]_0^A = \frac{1}{\lambda+x} (1 - e^{-(\lambda+x)A})$$

Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-\lambda t} e^{-xt} dt = \frac{1}{x + \lambda}$ et par conséquent $h_\lambda \in E$ et pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \frac{1}{\lambda + x}.$$

- 4. Pour tout $x > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n e^{\frac{-xt}{2}} = 0$, donc on peut trouver $A > 0$ tel que $t^n e^{\frac{-xt}{2}} \leq 1$ pour tout $t \geq A$ et donc $t^n e^{-xt} \leq e^{\frac{-xt}{2}}$ pour tout $t \geq A$, donc pour tout $t \geq A$,

$$|g_n(t)e^{-xt}| \leq |f(t)|e^{\frac{-xt}{2}},$$

ainsi $t \mapsto g_n(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire $g_n \in E$.

- 5. **Transformée de Laplace d'une dérivée.** Soient $x \in \mathbb{R}$, $(\varepsilon, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, une intégration par parties donne

$$\int_\varepsilon^A f'(t)e^{-xt} dt = [f(A)e^{-xA} - f(\varepsilon)e^{-x\varepsilon}] + x \int_\varepsilon^A f(t)e^{-xt} dt.$$

Or d'après les hypothèses, les fonctions f et f' admettent chacune une limite à droite en 0, d'où en faisant tendre ε vers 0, on obtient :

$$(*) \quad \int_0^A f'(t)e^{-xt} dt = [f(A)e^{-xA} - f(0)] + x \int_0^A f(t)e^{-xt} dt.$$

Le terme à droite dans la relation (*) admet une limite finie quand A tend vers l'infini, car :

- $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t)e^{-xt} dt$ existe car $f \in E$.
- $\lim_{A \rightarrow +\infty} [f(A)e^{-xA} - f(0)]$ existe aussi car f est bornée.

En faisant tendre A vers $+\infty$, il vient

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0),$$

pour tout $x > 0$.

6. Régularité d'une transformée de Laplace

(a) Considérons la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $u_n(x) = \int_n^{n+1} f(t)e^{-xt} dt$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$\begin{aligned} \varphi_n : [n, n+1] \times]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) &\longmapsto f(t)e^{-xt} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} : [n, n+1] \times]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) &\longmapsto -tf(t)e^{-xt} \end{aligned}$$

sont continues, donc U_n est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x > 0$,

$$U'_n(x) = - \int_n^{n+1} tf(t)e^{-xt} dt$$

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < b < a$. Alors pour $x \geq a$ et $t \geq 0$, on a

$$|tf(t)e^{-xt}| \leq t|f(t)|e^{-at} \leq |f(t)|e^{-bt}te^{-(a-b)t}.$$

La fonction $t \mapsto te^{-(a-b)t}$ étant continue sur $[0, +\infty[$ et tend vers 0 à l'infini, donc elle est bornée par une constante positive K , d'où

$$|tf(t)e^{-xt}| \leq K|f(t)|e^{-bt}.$$

- $\forall x \geq a$, on a

$$|U'_n(x)| \leq \int_n^{n+1} |tf(t)e^{-xt}| dt \leq K \int_n^{n+1} |f(t)|e^{-bt} dt = Kv_n,$$

avec $v_n = \int_n^{n+1} |f(t)|e^{-bt} dt$. La série $\sum v_n$ est convergente, car

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = \int_0^n |f(t)|e^{-bt} dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-bt} dt$$

donc la série $\sum U'_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$. On a donc

- $\forall n \in \mathbb{N}, U_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- La série $\sum U_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $\mathcal{L}(f)$.
- La série $\sum U'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Donc $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(f)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U'_n(x) = \int_0^{+\infty} (-tf(t))e^{-xt} dt = - \int_0^{+\infty} g_1 e^{-xt} dt,$$

ou encore

$$\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1).$$

- (b) De même on peut montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}(f)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)(x).$$

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

7. (a) Soit $A > 0$, f est continue sur $[0, A]$, donc bornée sur $[0, A]$ et il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0, A], |f(t)| \leq M$ et par suite

$$\int_0^A f(t) e^{-xt} dt \leq M \int_0^A e^{-xt} dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{M}{x}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t) e^{-xt} dt = 0$.

D'autre part, Soit $a > 0$ fixé et $x > a$, alors on a :

$$\left| \int_A^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt \right| \leq \int_A^{+\infty} |f(t) e^{-at}| e^{(a-x)t} dt \leq e^{(a-x)A} \int_A^{+\infty} |f(t) e^{-at}| dt$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(a-x)A} = 0$, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt = 0$.

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt = 0.$$

- (b) *Théorème de la valeur initiale.* D'après la question 5, on a pour tout $x > 0$,

$$\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$$

et comme f' est bornée, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f') = 0$ (d'après 7(a)) et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0).$$

8. Théorème de la valeur finale

- (a) Soit $A > 0$ tel que $|f(t)| \leq 1 + |l|$ pour tout $t \geq A$ et soit $M = \sup_{t \in [0, A]} |f(t)|$ (f est continue sur le segment $[0, A]$), alors $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \geq 0$ où $M = \max(1 + |l|, M)$. Ainsi f est bornée et donc $f \in F$.

(b) Soit n un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} h_n(x) dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right) dx, \quad \text{poser } x = a_n t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-a_n t} f(t) a_n dt = a_n \mathcal{L}(f)(a_n)\end{aligned}$$

(c) La suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto l e^{-x}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, $|h_n(x)| \leq M e^{-x}$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} h_n(x) dx = l \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = l.$$

(d) Si $l \neq 0$, alors $\mathcal{L}(f)(a_n) \sim \frac{l}{a_n}$ et ceci pour tout suite à termes positifs qui converge vers 0 et donc $\mathcal{L}(f)(x) \sim \frac{l}{x}$ en 0.

9. (a) On a $\forall x \geq 0$, $R(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$, donc R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $R'(x) = -f(x)$.
D'autre part, f étant dans E , donc R' aussi et par suite pour tout $x > 0$,

$$x \mathcal{L}(R)(x) - R(0) = \mathcal{L}(R')(x) = -\mathcal{L}(f)(x),$$

ou encore

$$\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x \mathcal{L}(R)(x).$$

(b) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$, donc il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|R(t)| \leq \varepsilon$. D'autre part,

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| &= |x \mathcal{L}(R)(x)| \leq x \left(\int_0^A R(t) e^{-xt} dt + \int_A^{+\infty} R(t) e^{-xt} dt \right) \\ &\leq x \int_0^A |R(t)| dt + x \int_A^{+\infty} \varepsilon e^{-xt} dt \\ &\leq x \int_0^A |R(t)| dt + x \int_0^{+\infty} \varepsilon e^{-xt} dt \\ &\leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon\end{aligned}$$

(c) Soit $\alpha > 0$ tel que $0 < x < \alpha$ entraîne $x \int_0^A |R(t)| dt \leq \varepsilon$ et donc

$$0 < x < \alpha \implies |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq 2\varepsilon,$$

ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = R(0)$ et donc $\mathcal{L}(f)$ se prolonge en 0 par $R(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Partie III : Application

10. (a) La quantité $\int_0^1 f(t)dt$ est bien définie puisque f est continue sur $[0, 1]$. À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\cos(x)}{x} + \cos 1 = \cos 1$, et la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, car $\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ existe. Il en résulte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe.

- (b) On a :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$$

Comme la série harmonique est divergente, il est de même de la série $\sum u_n$, ceci montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ est divergente. Donc f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

- (c) Soit $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} (*) \quad \int_0^A (\sin t) e^{-xt} dt &= \operatorname{Im} \left(\int_0^A e^{(i-x)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x} \right]_0^A \right) \\ &= -\frac{1}{1+x^2} (e^{-xA} (x \sin A + \cos A) - 1) \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto (\sin t) e^{-xt}$ est dominé par la fonction intégrable $t \mapsto e^{-xt}$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le terme à droite dans (*) tend vers $\frac{1}{1+x^2}$ quand A tend vers l'infini, ainsi

$$\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A (\sin t) e^{-xt} dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

- (d) Soit $H(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ avec $x > 0$. H est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc bornée sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto H(t) e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) e^{-xt} = 0$, donc par une intégration par parties

$$\forall x > 0, \quad \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt = x \int_0^{+\infty} H(t) e^{-xt} dt$$

d'où

$$(**) \quad \mathcal{L}(f)(x) = x \mathcal{L}(H)(x)$$

La transformée $\mathcal{L}(H)$ est définie au moins sur $]0, +\infty[$ et continue sur $]0, +\infty[$: en effet, si on fixe $x_0 > 0$, la fonction $t \mapsto H(t) e^{-x_0 t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et une domination évidente montre la continuité de $\mathcal{L}(H)$ sur $[x_0, +\infty[$. Grâce à (**), on déduit la continuité

de $\mathcal{L}(H)$ et donc de $\mathcal{L}(f)$ sur $]0, +\infty[$.

Enfin

$$\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = \lim_{x \rightarrow 0} x\mathcal{L}(H) = \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x).$$

Considérons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ qui est continue sur $[0, +\infty[$. Montrons que Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, en effet, posons $g(x, t) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$. On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin t$ et si $x > a$ on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at},$$

ceci prouve que Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$ et

$$\Phi'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t = - \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc $\Phi(x) = c - \arctan x$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$, car $\left| e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-xt}$ et donc $|\Phi(x)| \leq \frac{1}{x}$, ainsi $c = \frac{\pi}{2}$, d'où $\forall x > 0$, $\Phi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = \Phi(0)$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

• • • • •