CCP 2006. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.

Corrigé pour serveur UPS de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

PREMIER EXERCICE.

a. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\Big) - \dfrac{1}{n+2}$ de sorte que $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{2}\Big(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\Big) - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1}$.

Il en découle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}$. $\square$

b. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{(k-1)!} = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2^k}{k!}$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{(n-1)!} = 2e^2$. $\square$

SECOND EXERCICE.

Il est immédiat que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc, d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

a. Avec les notations classiques, il vient que $b_n = 0$ puisque f est paire et $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t$. Donc $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$ et $a_n = (-1)^n\dfrac{4}{n^2}$ par deux intégrations par parties. Ainsi $f(t) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$ pour tout réel t. $\square$

b. En particulier pour $t=0$ il vient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$. $\square$

Or $\sum\limits_{n=1}^{2N+1} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^2} - \sum\limits_{n=0}^{N}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n^2} - \sum\limits_{n=1}^{2N+1}\dfrac{1}{n^2}$ (1).

En faisant tendre N vers l'infini (ce qui est licite vu la convergence des séries), il vient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. $\square$

En reprenant alors la première égalité de (1), on obtient de même $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$. $\square$

c. D'après le théorème de Parseval de convergence quadratique, on a $\|f\|_2^2 = \dfrac{\pi^4}{9} + 8\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4}$.

Or $\|f\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{\pi^4}{5}$. D'où $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$. $\square$

PROBLÈME.

Découverte des fonctions tests.

1. Si $\overline{A}$ est compacte alors elle est bornée donc A également puisque $A \subset \overline{A}$. Réciproquement si A est bornée alors il existe $R>0$ tel que $A \subset [-R,R]$ ce qui entraîne $\overline{A} \subset \overline{[-R,R]} = [-R,R]$ et donc $\overline{A}$ est bornée donc compacte car fermée. $\square$

2. Il est immédiat que u est continue à support compact ($[-2,2]$) mais n'est pas une fonction test car elle n'est pas dérivable en 2 ($u'_d(2) = 0$ et $u'_g(2) = -4$). $\square$
La fonction sinus n'est pas une fonction test car elle n'est pas à support compact (la suite $\big(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans le support qui de ce fait n'est pas borné). $\square$

3. Soit le prédicat $\mathcal{P}_k$: "$h^{(k)}(x) = P_k\Big(\dfrac{1}{x}\Big)h(x)$ pour tout $x>0$ avec P_k polynôme de degré $2k$". $\mathcal{P}_0$ est vrai et en supposant que $\mathcal{P}_k$ soit vrai pour $k \leqslant n$ il vient $h^{(n+1)}(x) = Q\Big(\dfrac{1}{x}\Big)h(x)$ pour $x>0$ avec $Q(u) = u^2\Big(P_n(u) - P'_n(u)\Big)$ qui est bien un polynôme de degré $2+2n = 2(n+1)$ puisque $P_n - P'_n$ est de degré $2n$. $\square$
Il en découle par croissances comparées que $\lim\limits_{x\to 0^+} h^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty,0[$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} h^{(k)}(x) = 0$. Comme en outre h est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ itéré prouve que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (et $h^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier k). $\square$
h n'est pas une fonction test car de support $[0,+\infty[$ non borné. Elle n'est pas non plus développable en série entière au voisinage de 0 car si elle l'était on aurait $h(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{h^{(k)}(0)}{k!}x^k$ au voisinage de 0 donc h serait identiquement nulle au voisinage de 0 ce qui n'est pas. $\square$

4. x appartient au support de φ si et seulement si $1-x^2 \geqslant 0$ donc le support de φ est le segment $[-1,1]$. Comme h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (question 3), par composition la fonction φ l'est également ce qui prouve que φ est une fonction test.
φ est paire, nulle pour $x \geqslant 1$ et comme $\varphi'(x) = -2xh'(1-x^2)$ elle est décroissante sur $[0,1]$. Allure du graphe immédiate. $\square$

Pour $-\infty < a < b < +\infty$ soit $\varphi_{a,b} : x \longmapsto \varphi(\alpha x + \beta)$ avec $\alpha = 2/(b-a)$ et $\beta = -(a+b)/(b-a)$. Il est immédiat que $\varphi_{a,b}$ est une fonction test de support $[a,b]$ et que si $[a,b] \cap [c,d]$ est vide alors $\varphi_{a,b} + \varphi_{c,d}$ est une fonction test de support $[a,b] \cup [c,d]$. $\square$

5. Une telle fonction est nulle au voisinage de l'infini donc y admet des limites nulles. $\square$

6. φ est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Étant nulle au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$, elle et intégrable en $-\infty$ et $+\infty$ donc sur $\mathbb{R}$ et $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\,\mathrm{d}\,t > 0$ car φ est positive et en outre strictement positive et continue en 1. $\square$
Il en découle $\rho : x \longmapsto \dfrac{1}{I}\varphi(t)$ est une fonction test de support $[-1,1]$, positive et telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$. $\square$

Il en résulte immédiatement que ρ_n est une fonction test positive de support $\left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$ $\square$

> Il existe une suite régularisante c'est à dire une suite (ρ_n) de fonctions tests positives telles que :
> $\mathrm{Supp}(\rho_n) = [-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}]$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$. $\square$

Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ou par des fonctions tests.

7. Si la suite (P_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f alors elle satisfait le critère de Cauchy de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. En particulier pour $\varepsilon = 1$, il existe N tel que $\|P_p - P_q\|_\infty \leqslant 1$ pour $p, q \geqslant N$. En particulier $\|P_n - P_N\|_\infty \leqslant 1$ pour $n \geqslant N$. $\square$
Il en découle que $P_n - P_N$ est une constante C pour $n \geqslant N$ car sinon ce serait un polynôme de degré au moins 1 donc non borné sur $\mathbb{R}$.
En d'autres termes $P_n(x) = P_N(x) + C$ pour $n \geqslant N$ ce qui prouve que la suite (P_n) est stationnaire donc que $f = P_N + C$ et donc que f est un polynôme. $\square$

8. z_n est continue affine par morceaux, identiquement égale à 1 sur $[-n,n]$, nulle sur $]-\infty, -(n+1)] \cup [n+1, +\infty[$.
Pour tout x_0 fixé quelconque dans $\mathbb{R}$ on a $z_n(x_0) = 1$ pour $n \geqslant \mathrm{Int}(x_0) + 1$ ce qui prouve que la suite (z_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante égale à 1.
La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car $\|z_n - 1\|_\infty = 1$.

En traduisant le fait que g est nulle à l'infini avec $\varepsilon = 1$ il vient qu'il existe $A > 0$ tel que $|g(x)| \leqslant 1$ pour $|x| \geqslant A$. Par ailleurs g est bornée car continue sur le compact $[-A, A]$. Il en découle que g est bornée sur $\mathbb{R}$. $\square$
Naturellemnt la suite (α_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A_ε tel que $|g(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $|x| \geqslant A_\varepsilon$ puisque g est nulle à l'infini. Donc $\alpha_n \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant \mathrm{Int}(A_\varepsilon) + 1$. Ce qui prouve que $\ell = 0$. $\square$

Pour $|x| \leqslant n$ on a $g_n(x) = g(x)$ donc $|g(x) - g_n(x)| = 0$.
Pour $|x| \geqslant n+1$ on a $g_n(x) = 0$ donc $|g(x) - g_n(x)| = |g(x)| \leqslant \alpha_n$.
Pour $n \leqslant |x| \leqslant n+1$ on a $g_n(x) = (n+1-|x|)g(x)$ donc $|g(x) - g_n(x)| = |(|x|-n)g(x)| = (|x|-n)|g(x)| \leqslant |g(x)| \leqslant \alpha_n$.
En conclusion : $\|g - g_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ pour tout n. $\square$
Comme la suite (α_n) tend vers 0, il en résulte que la suite (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers g.

> Ainsi une fonction continue sur $\mathbb{R}$ nulle à l'infini est-elle limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues à support compact. $\square$

9. Pour tout x, $t \longmapsto g(t)f(x-t)$ est continue à support compact (inclus dans $\mathrm{Supp}(g)$) donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
De même pour $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ (support inclus dans $[-R+x, R+x]$).
Le changement de variable $t \longmapsto u = x - t$, qui est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ prouve que $f * g = g * f$.

> Ainsi peut-on définir le produit de convolution d'une fonction continue et d'une fonction continue à support compact et cette opération est commutative. $\square$

10 Si $x > R + S$ on a, pour tout $t \in [-R, R]$, $x - t > (R+S) - R = S$ donc $f(x-t) = 0$.
Donc $(f * g)(x) = (g * f)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-R}^{R} g(t)f(x-t) = 0$. De même si $x < -(R+S)$.

> Ainsi le produit de convolution de deux fonctions continues à support compact est il à support compact. $\square$

11 Si $x \in [-a, a]$ et si $t > a + R$ alors $x - t < a - (a + R) = -R$ donc $g(x - t) = 0$. De même si $t < -a - R$.

Ainsi $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-a-R}^{a+R} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}\,t.$ □

Pour prouver que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I_a = [-a, a]$ et y est en outre dérivable sous le signe intégrale, il suffit de vérifier que (intégrale propre dépendant d'un paramètre) :
1/ $\forall x \in I_a$, $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue par morceaux sur le segment $K_a = [-a-R, a+R]$.
2/ $h(x, t) = f(t)g(x-t)$ est partiellement dérivable par rapport à x et :
a/ $\forall x \in I_a$, $t \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur K_a.
b/ $\forall t \in K_a$, $x \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I_a.
Or 1/ est clair et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t) = f(t)g'(x-t)$ continue en (x, t) (car g est $\mathcal{C}^1$) ce qui rend clair les hypothèses /a et b/.

Ainsi $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ et $(f * g)'(x) = \displaystyle\int_{-a-R}^{a+R} f(t)g'(x-t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{\mathbb{R}} f(t)g'(x-t)\,\mathrm{d}\,t = (f * g')(x)$.
Comme cela est vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que le résultat précédent est vrai sur $\mathbb{R}$. Par une itération évidente, on en déduit :

> Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si g est à support compact et de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$ pour tout $k \leqslant n$. □

12 Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$ on a $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\rho_n(t)\,\mathrm{d}\,t$. Donc, pour tout réel x, on a :

$$(f * \rho_n)(x) - f(x) = (\rho_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)\big(f(x-t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(t)\big(f(x-t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}\,t$$

d'où l'inégalité demandée (puisque ρ_n est positive). □
Supposons désormais que f soit en outre uniformémémnt continue sur $\mathbb{R}$ et donnons nous $\varepsilon > 0$ quelconque. Il existe alors $N = N_\varepsilon$ tel que $|f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon$ dès que $|u - v| \leqslant 1/N$. Il résulte alors de l'inégalité précédente que :

$|(f * \rho_n)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \displaystyle\int_{-1/n}^{1/n} \rho_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \varepsilon$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $n \geqslant N$ ce qui prouve la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f * \rho_n)$ vers f. Or $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question 11. Ainsi :

> Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et si (ρ_n) est une suite régularisante alors la suite $(f * \rho_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. En particulier f est uniformément approximable par une suite de fonction $\mathcal{C}^\infty$ □

Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'infini (ou plus généralement admet des limites finies à l'infini), il est classique (et facile à vérifier) que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En particulier si f est à support compact. Mais alors $f * \rho_n$ est à support compact (question 10) donc est une fonction test. Ainsi :

> Une fonction continue à support compact est limite uniforme d'une suite de fonctions tests.

Théorème de Whitney.

13 Si f est continue, F est fermé dans $\mathbb{R}$ en tant qu'image réciproque du singleton $\{0\}$ qui est un fermé. □

14 Si $x \in Z(d_F)$ alors $d(x, F) = 0$ donc classiquement $x \in \overline{F}$ donc $x \in F$ puisque F est fermé. Ainsi $Z(d_f) \subset F$ et comme l'inclusion inverse est évidente, on a $Z(d_F) = F$.
Comme l'application d_F est continue (et même lipschitzienne de rapport 1, résultat classique de cours), cela prouve que tout fermé de $\mathbb{R}$ est du type $Z(f)$ où f est continue.
Mais cela ne prouve pas le théorème de Whitney car d_F n'est pas forcément $\mathcal{C}^\infty$. En effet dans l'exemple proposé, d_F est la fonction paire telle que $d_F(x) = 1 - x$ pour $x \in [0, 1]$ et $d_F(x) = 0$ si $x \geqslant 1$ et cette fonction n'est pas dérivable en 1. □

15 Si $-\infty < a < b < +\infty$ alors $F = Z(\varphi_{a,b})$ (Cf question 4).
Si $b = +\infty$ alors $\varphi_{a,+\infty} : x \longmapsto h(x - a)$ est positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $Z(\varphi_{a,+\infty}) = F$. Idem si $a = -\infty$.
Donc si F est le complémentaire d'un intervalle ouvert I, borné ou non, il existe une fonction φ_I positive et de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $Z(\varphi_I) = F$. □

Si F est le complémentaire de la réunion $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ d'un nombre fini d'intervalle ouverts I_n deux à deux disjoints, alors

$F = Z(\psi)$ avec $\psi = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \varphi_{I_n}$ positive et de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

16 Il reste à établir le résultat lorsque la réunion est dénombrable non finie donc indexable par $\mathbb{N}$: $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$ où les I_n sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints (avec éventuellement 1 ou 2 d'entre eux non borné). Ce cas est beaucoup plus délicat.

Notons $\varphi_n = \varphi_{I_n}$.
Si I_n est borné alors φ_n est une fonction test donc toutes ses dérivées sont à support compact donc, pour tout entier k, $\varphi_n^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. On note $M_{n,k} = \operatorname*{Sup}\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n^{k)}(x)|$.

Si I_n n'est pas borné par exemple $I_n =]a, +\infty[$ alors $\varphi_n(x) = h(x-a)$. D'après la question 3.a, $h^{(k)}$ admet une limite nulle en 0 et une limite finie $P_k(0)$ en $+\infty$. Donc $h^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}$ car nulle sur $\mathbb{R}^-$. On peut donc encore considérer $M_{n,k}$ dans ce cas.

Soit α_n tel que $1/\alpha_n = n^2 \operatorname{Max}\left\{M_{n,0}, \ldots, M_{n,n}\right\}$. Alors on a $|\alpha_n\varphi_n^{(k)}(x)| \leqslant 1/n^2$ pour tout réel x, tout entier non nul n et tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

Soit alors $\psi = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n\varphi_n$. Cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$ ainsi que toutes ses séries dérivées. En effet pour k entier quelconque fixé on a $|\alpha_n\varphi_n^{(k)}(x)| \leqslant 1/n^2$ dès que $n \geqslant k$ et cela pour tout réel x. Ce qui prouve que ψ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
En outre comme $\alpha_n\varphi_n$ est positive, on a $\psi(x) = 0$ si et seulement si $\varphi_n(x) = 0$ pour tout n (car $\alpha_n > 0$) donc si et seulement si x appartient au complémentaire de la réunion des I_n c'est à dire à F.

> Le théorème de Whitney est ainsi démontré : si F est un fermé de $\mathbb{R}$ il existe une fonction ψ positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $F = Z(\psi)$. $\square$

FIN