



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

Le problème proposé a pour but la démonstration d'un théorème relatif aux contractions d'un espace de Banach et l'étude, grâce à ce théorème, d'une équation fonctionnelle.

Si X et Y sont des ensembles, Y^X désigne l'ensemble des applications de X dans Y .

Si X est un ensemble non vide, $\mathcal{N}_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

I. Convergence uniforme dans $C([0,1], \mathbb{R})$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, pour $\mathcal{N}_\infty$, de $C([0,1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Soit f la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Montrer que f est bornée et que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3. Justifier que $(C([0,1], \mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$ est un espace de Banach.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $C([0,1], \mathbb{R})$ définie par : $u_n(x) = e^{x^n}$ pour tout $x \in [0,1]$.

Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy pour $\mathcal{N}_\infty$?

5. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $C([0,1], \mathbb{R})$ définie par : $v_n(x) = \int_0^x e^{t^n} dt$ pour tout $x \in [0,1]$.

Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers un élément v de $C([0,1], \mathbb{R})$.

Tournez la page S.V.P.

II. Théorème du point fixe de Banach

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel, soit A un sous-ensemble fermé non vide de E et soit $T \in A^A$ vérifiant : il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que $\|T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in A^2$ (on dit que T est contractante ou encore que T est une contraction).

1. Soit $(x, y) \in A^2$ tel que : $T(x) = x, T(y) = y$. Montrer que $x = y$.

2. Soit $a \in A$, on définit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $a_0 = a, a_{n+1} = T(a_n)$.

2.1 Montrer que : $\|a_{n+1} - a_n\| \leq \alpha^n \|a_1 - a_0\|$. En déduire que si $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ on a :

$$\|a_{n+p} - a_n\| \leq \|a_1 - a_0\| \left(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{n+i} \right).$$

2.2 Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est élément de A .

2.3 Montrer que T possède un unique point fixe qui est la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On établit ainsi le théorème du point fixe de Banach « Toute contraction T d'un fermé non vide A d'un espace de Banach possède un point fixe unique, de plus si $a \in A$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a, a_{n+1} = T(a_n)$, converge vers ce point fixe ».

3. On suppose que $A = E$, soit alors, $U \in E^E$ définie par : $U(x) = x + T(x)$.

3.1 Montrer que U est une bijection continue de E sur E .

3.2 Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$ on a : $\|U^{-1}(x) - U^{-1}(y)\| \leq (1 - \alpha)^{-1} \|x - y\|$ (U est donc un homéomorphisme de E sur E).

4. Soit $\mathcal{L}(E) = \{V \in E^E : (V \text{ linéaire}) \text{ et } (V \text{ continue})\}$, on note encore $\|V\| = \sup\{\|V(x)\| : \|x\| \leq 1\}$ la norme subordonnée de V ($V \in \mathcal{L}(E)$) ; soit I l'identité de E .

4.1 Soit $V \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\|V\| < 1$, montrer que V est contractante.

4.2 Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(E)$ et soit $V \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\|V_n\| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|V\| < 1, \|V_n - V\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $y \in E$ alors, d'après 3. $I + V_n$ et $I + V$ sont des isomorphismes de E ; on peut donc définir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left((I + V_n)^{-1}(y) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $x = (I + V)^{-1}(y)$, montrer que :

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(on aura intérêt à écrire : $V(x) - V_n(x_n) = (V(x) - V_n(x)) + (V_n(x) - V_n(x_n))$).

III. Etude d'une transformation de l'ensemble $C([0,1], \mathbb{R})$.

Soit $\varphi : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dira que φ est de type $\mathcal{U}$ si :

φ est continue et, il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que l'on ait :

$$|\varphi(x, y, z) - \varphi(x, y, z')| \leq r|z - z'| \text{ pour tout } (x, y, z, z') \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

1. Montrer que s'il existe $(\Psi, M) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+$ tel que : $\varphi = \Psi|_{[0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}}$ et

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial z}(x, y, z) \right| \leq M \text{ pour tout } (x, y, z) \in [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}, \text{ alors } \varphi \text{ est de type } \mathcal{U}.$$

2. On suppose que φ est de type $\mathcal{U}$.

2.1 Soit $u \in C([0,1], \mathbb{R})$, montrer que pour tout $x \in [0,1]$: $(y \rightarrow \varphi(x, y, u(y))) \in C([0,1], \mathbb{R})$.

2.2 Montrer que l'on peut définir $T_\varphi : C([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{[0,1]}$ par :

$$(T_\varphi(u))(x) = \int_0^1 \varphi(x, y, u(y)) dy.$$

Montrer que, pour tout $u \in C([0,1], \mathbb{R})$, $T_\varphi(u) \in C([0,1], \mathbb{R})$.

2.3 Montrer que l'on a :

$$\mathcal{N}_\infty(T_\varphi(u_1) - T_\varphi(u_2)) \leq r \mathcal{N}_\infty(u_1 - u_2), \text{ pour tout } (u_1, u_2) \in (C([0,1], \mathbb{R}))^2.$$

2.4 On définit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_{(\varphi, \lambda)} : C([0,1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0,1], \mathbb{R})$ par : $\mathcal{S}_{(\varphi, \lambda)}(u) = u + \lambda T_\varphi(u)$.

On suppose $r > 0$, montrer que l'on a : $\lambda \in \left] -\frac{1}{r}, \frac{1}{r} \right[\Rightarrow \mathcal{S}_{(\varphi, \lambda)}$ est un homéomorphisme de $(C([0,1], \mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$ sur lui même.

3. Soit $\mu \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$, soit $\varphi : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x, y, z) = \mu(x, y)z$; on supposera $\mu \neq 0$.

3.1 Montrer que φ est de type $\mathcal{U}$ et que si $\lambda \in]-1/\mathcal{N}_\infty(\mu), 1/\mathcal{N}_\infty(\mu)[$, on a : $\mathcal{S}_{(\varphi, \lambda)}$ est un isomorphisme de $(C([0,1], \mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$, sur lui même.

3.2 Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $C([0,1]^2, \mathbb{R})$, telle que : $\mathcal{N}_\infty(\mu_n - \mu) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme subordonnée, associée à $\mathcal{N}_\infty$, définie sur $\mathcal{L}(C([0,1], \mathbb{R}))$. Si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de $C([0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi_n(x, y, z) = \mu_n(x, y)z$ montrer que : $\|T_{\varphi_n} - T_\varphi\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

IV. Etude d'une application

On considère l'équation intégrale de Fredholm : (E) $w(x) = x + \int_0^1 \sin(xy) w(y) dy$.

Une solution de (E) (s'il en existe) est donc un élément w de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait : $w(x) = x + \int_0^1 \sin(xy) w(y) dy$. On s'intéresse à la résolution de (E) dans $C([0,1], \mathbb{R})$.

1. Montrer, en utilisant III) que (E) possède une solution unique $w \in C([0,1], \mathbb{R})$.

2. Soit, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de $C([0,1]^2, \mathbb{R})$ définie par : $v_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} (xy)^{2i-1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit l'équation intégrale (E_n) par : $w_n(x) = x + \int_0^1 v_n(x, y) w_n(y) dy$.

2.1 Montrer que (E_1) possède une solution unique $w_1 \in C([0,1], \mathbb{R})$ et expliciter w_1 .

2.2 Montrer que, pour tout $n \geq 2$, la résolution de (E_n) se ramène à celle d'un système linéaire que l'on explicitera.

2.3 Montrer, en utilisant III.3) que, si $n \geq 2$, (E_n) possède une solution unique $w_n \in C([0,1], \mathbb{R})$. (on aura intérêt à montrer que : $-1 \in]-1/\mathcal{N}_\infty(v_n), 1/\mathcal{N}_\infty(v_n)[$ si $n \geq 2$).

2.4 Montrer que $\mathcal{N}_\infty(w_n - w) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Fin de l'énoncé