# Première épreuve CCP filière MP

## I. Polynômes de Tchebychev

**1.a)** Tout réel $\theta$ vérifie $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,(\cos\theta)^{n-k}\,i^k\,(\sin\theta)^k\right)$

Or $i^k$ est réel quand $k$ est pair et imaginaire pur sinon, ainsi

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}\,(\cos\theta)^{n-2k}\,i^{2k}\,(\sin\theta)^{2k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k\,C_n^{2k}\,(\cos\theta)^{n-2k}\,(1-(\cos\theta)^2)^k$$

Finalement, $\boxed{\text{le polynôme } T = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k\,C_n^{2k}\,X^{n-2k}\,(1-X^2)^k \text{ convient.}}$

En effet, c'est un polynôme à coefficients réels vérifiant $T(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel $\theta$. Pour tout $k$, le polynôme $X^{n-2k}\,(1-X^2)^k$ est degré $n$ donc, par somme, $T$ est de degré au plus $n$. Son coefficient de degré $n$ est $\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k\,C_n^{2k}\,(-1)^k = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k}$ qui est non nul (somme de termes strictement positifs) donc $T$ est bien de degré $n$.

**1.b)** Soit $P$ et $Q$ deux polynômes réels de degré $n$ vérifiant $P(\cos\theta) = Q(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout réel $\theta$. Alors $P - Q$ est un polynôme réel de degré au plus $n$ admettant une infinité de racines puisque tout réel s'écrivant $\cos(\theta)$, i.e. tout réel de $[-1;1]$, est un zéro de $P-Q$. Le polynôme $P-Q$ est donc le polynôme nul et on a bien $P = Q$.

$$\boxed{\text{Le polynôme } T \text{ est donc unique.}}$$

**2.a)** Pour tout réel $x$ de $[-1;1]$, on a, en posant $\theta = \arccos x$,

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(x) - 2\,x\,T_{n+1} + T_n(x) &= \cos((n+2)\theta) - 2\,\cos(\theta)\,\cos((n+1)\theta) + \cos(n\theta) \\
&= \cos((n+1)\theta)\,\cos\theta - \sin((n+1)\theta)\,\sin\theta - 2\,\cos(\theta)\,\cos((n+1)\theta) \\
&\qquad + \cos((n+1)\theta)\,\cos\theta + \sin((n+1)\theta)\,\sin\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien $\boxed{T_{n+2}(x) = 2\,x\,T_{n+1}(x) - T_n(x) \text{ pour tout } x \text{ de } [-1;1].}$

**2.b)** Par définition de $T_n$ et d'après la question 1.b), on obtient $\boxed{T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } T_2 = 2X^2 - 1}$ car $\cos 0 = 1$ et $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.
D'après les questions 2.a et b, on obtient $T_3 = C_3^0 X^3 - C_3^2\,X\,(1-X^2)$ i.e. $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X.}$

**2.c)** D'après la question 1.a, le coefficient de terme de plus haut degré (i.e. $n$) de $T$ est :

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} C_n^{2k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,C_n^k\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left((1+1)^n + (1-1)^n\right) = \boxed{2^{n-1} \text{ si } n > 0} \\ = \boxed{1 \text{ pour } n = 0} \end{cases}$$

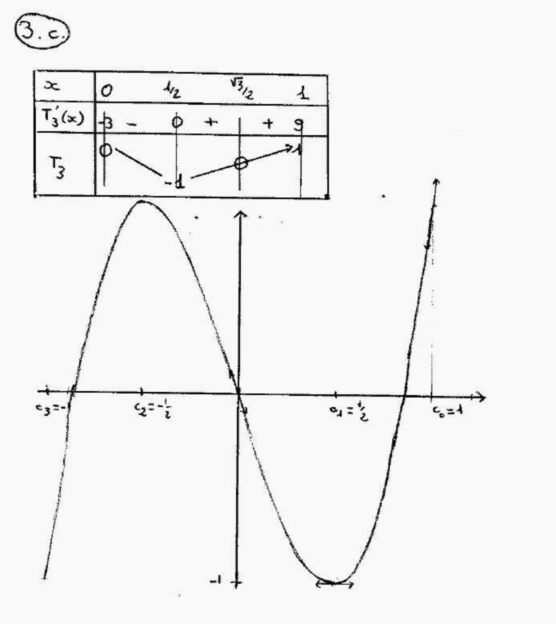
**3.a)** Quand $k$ varie de 0 à $n-1$, les réels $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont distincts et compris entre 0 et $\pi$. Les réels $\cos\theta_k$ sont donc $n$ racines distinctes de $T_n$ car $T_n(\theta_k) = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2} = 0$. Or $T_n$ est un polynôme de degré $n$ et de coefficient dominant $2^{n-1}$ (question précédente). Ainsi,

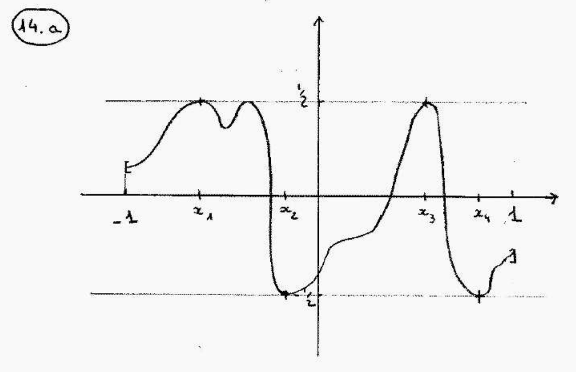
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x-\cos\theta_k)}$$

**3.b)** On a $\|T_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1;1]}|T_n(x)| = \sup_{x\in[-1;1]}|\cos(n\arccos(x)|$ donc $\|T_n\|_\infty \leqslant 1$. Par ailleurs $T_n(c_k) = \cos\left(n\arccos\cos\frac{k\pi}{n}\right)$. Or $k\pi/n$ est compris dans $[0;\pi]$ intervalle sur lequel $\arccos\circ\cos$ est l'identité donc $T_n(c_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$. Ainsi $\|T_n\|_\infty \geqslant 1$ et finalement

$$\boxed{\forall k \in \{0,1,...,n\} \;\; \|T_n\|_\infty = 1 = |T_n(c_k)| \text{ et } T_n(c_k) = -T_n(c_{k+1}) = (-1)^k \;\; \forall k \in \{0,1,...,n-1\}}$$

**3.c)** D'après la question 2b, on a $T_3 : x \in [-1;1] \mapsto 4x^3 - 3x$. C'est donc une fonction impaire de dérivée $T_3' : x \mapsto 3(4x^2-1)$ et de tableau de variations



## II. Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

**4.** Pour toute fonction $h$ de $E$, l'application $\beta : t \in ]-1;1[ \mapsto h(t)/\sqrt{1-t^2}$ est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, l'application $t \mapsto h(t)/\sqrt{1+t}$ est continue sur le segment fermé $[0;1]$ (comme quotient de fonctions continues) donc elle y est bornée en valeur absolue. Soit $M$ un de ses majorants. La fonction continue $H$ vérifie alors $|\beta(t)| \leqslant M/\sqrt{1-t}$ or $t \mapsto 1/\sqrt{1-t}$ est intégrable sur $[0;1[$ (c'est une fonction de référence) donc $\beta$ est intégrable sur $[0;1[$.
De la même façon, $\beta$ est intégrable sur $]-1;0]$.
Finalement $\boxed{t \in ]-1;1[ \mapsto \frac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ est intégrable sur } ]-1;1[.}$

**5.a)** Comme $\beta : t \mapsto h(t)/\sqrt{1-t^2}$ est continue sur l'intervalle $]-1;1[$, elle y admet des primitives, soit $H$ l'une d'elles. La fonction $H$ est donc dérivable et par conséquent la fonction $\phi : x \in ]-1;1[ \mapsto \int_{-x}^{x} \beta(t)\, dt = H(x) - H(-x)$ aussi. Sa dérivée vérifie $\phi'(x) = \beta(x) + \beta(-x)$ pour tout $x$ de $]-1;1[$.
Par ailleurs, la fonction $\beta$ est positive comme quotient de fonctions positives, donc la dérivée $\phi'$ est positive sur $]-1;1[$. Ainsi $\phi$ est croissante sur $]-1;1[$. Or $\phi(0) = 0$ et par hypothèse $\lim_{x\to 1^-} = 0$ donc $\phi$ est nulle sur $[0;1[$. Par ailleurs $\beta$ étant une fonction continue positive sur $[-x;x]$ pour tout $x$ de $[0;1[$, donc son intégrale $\phi(x)$ sur ce segment est nulle si et seulement si la restriction de $\beta$ à $[-x;x]$ est nulle. Ainsi $h$ est nulle sur $[-x;x]$ pour tout $x$ de $[0;1[$, i.e. sur $]-1;1[$ et donc par continuité de $h$ en 1 et $-1$ sur $[-1;1]$ (on a $h(1) = \lim_{x\to 1^-} h(x) = 0$).

**5.b)** Soit $f$ et $g$ dans $E$, alors $f \times g$ est aussi dans $E$ car le produit de fonctions continues est une fonction continue, donc $< f, g >$ est bien défini. De plus, on a

- pour toute fonction $f$ et $g$ de $E$, $< f, g >=< g, f >$ (symétrie);
- pour tout $f$ de $E$, l'applications $h \in E \mapsto < f, h >$ est linéaire (par linéarité de l'intégrale) donc $h \in E \mapsto < h, f >$ aussi par symétrie;
- pour tout $f$ de $E$, on a $< f, f > \geqslant 0$ car $t \mapsto f(t)f(t)/\sqrt{1-t^2}$ est une fonction positive sur $]-1;1[$ donc pour tout $x$ positif, comme $-x \leqslant x$, l'intégrale $\int_{-x}^{x} f(t)f(t)/\sqrt{1-t^2}\, dt$ est positive donc sa limite $< f, f >$ aussi.
- Si $f$ est dans $E$ et vérifie $< f, f >= 0$ alors $f$ est la fonction nulle (en effet d'après 5a, on sait que $f^2$ est nulle).

Ainsi, on vient de vérifier les propriétés permettant d'affirmer que $\boxed{<,> \text{ est un produit scalaire.}}$

**6.** Soit $n$ et $m$ deux entiers naturels. Les fonctions $T_n$ et $T_m$ appartiennent bien à $E$. On a

$$< T_n, T_m >= \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos t)\ \cos(m \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \lim_{x\to 1^-} \int_{-x}^{x} \frac{\cos(n \arccos t)\ \cos(m \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Or pour tout $x$ strictement positif, la fonction arccos est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-x;x]$ donc est un changement de variables licite sur $[-x;x]$. De plus $\arccos'(t) = -1/\sqrt{1-t^2}$. Ainsi, en faisant le changement de variables , on obtient

$$<T_n, T_m>= \lim_{x\to 1^-} \left( -\int_{\arccos(-x)}^{\arccos(x)} \cos(ns)\ \cos(ms)\, ds \right) = \lim_{x\to 1^-} \int_{\arccos(x)}^{\arccos(-x)} \frac{\cos((n+m)s) + \cos((m-n)s)}{2}\, ds$$

Or les fonctions $s \mapsto \cos((n+m)s)$ et $s \mapsto \cos((m-n)s)$ sont continues sur $[0;\pi]$ intervalle contenant $[\arccos(x);\arccos(-x)]$, donc par linéarité de l'intégrale puis passage à la limite, on obtient

$$< T_n, T_m >= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((m-n)s)\,ds = \frac{\pi\,(\delta_{n+m,0}+\delta_{m-n,0})}{2}$$

$\boxed{\text{Ainsi, on a } < T_n, T_m >= 0 \text{ si } n \neq m \text{ et } < T_n, T_n >= \pi \text{ si } n = 0 \text{ et } \pi/2 \text{ sinon.}}$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout naturel } n, \text{ la famille } (T_0, T_1, ..T_n) \text{ est une famille orthogonale de } E_n}$ puisque les éléments $T_i$ sont bien dans $E_n$.

**7.a)** L'ensemble $E_n$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace vectoriel $E$ qui est muni d'une norme euclidienne. Ainsi $\boxed{\text{le théorème de projection}}$ sur un sous-espace vectoriel de dimension finie assure que pour tout élément $f$ de $E$, il existe un unique vecteur $t_n(f)$ de $E_n$ réalisant la distance de $f$ à $E_n$. C'est la projection orthogonale de $f$ sur $E_n$.

**7.b)** D'après la question 6, la famille $(T_0, T_1, ..T_n)$ est une famille orthogonale de $E_n$. Aucun des $T_i$ n'étant nul, la famille $(T_0/\|T_0\|_2, ..., T_n/\|T_n\|_2)$ est une famille orthonormale de $E_n$, contenant $n+1 = \dim E_n$ vecteurs, c'est donc une base orthonormale de $E_n$. Ainsi

$$\boxed{t_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >}{\|T_k\|_2}\frac{T_k}{\|T_k\|_2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >}{< T_k, T_k >} T_k}$$

**8.** D'après la question 7a et la bilinéarité de $<,>$, on a

$$d_2(f, E_n) = \sqrt{< f - t_n(f), f - t_n(f) >} = \sqrt{\|f\|_2^2 - 2 < f, t_n(f) > + \|t_n(f)\|_2^2}$$

Or la question 7b et la linéarité de $< f, . >$ montrent que $< f, t_n(f) >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >^2}{< T_k, T_k >}$.

Par ailleurs, la famille $(T_0, ..T_n)$ étant orthogonale, on a aussi

$$\|t_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{< f, T_k >}{< T_k, T_k >}\right)^2 < T_k, T_k >= \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >^2}{< T_k, T_k >}$$

D'où en regroupant ces deux expressions

$$\boxed{d_2(f, E_n) = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|_2^2}}}$$

**9.a)** Comme $E_n$ est inclus dans $E_{n+1}$, la suite $(d_2(f, E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or elle est minorée (par 0) donc convergente. Ainsi la suite de terme général $(d_2(f, E_n))^2$ qui vaut $\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} < f, T_k >^2 / \|T_k\|_2^2$ est convergente. Donc d'après le théorème sur les opérations sur les suites convergentes, la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{<f,T_k>^2}{\|T_k\|_2^2}$ est convergente i.e. $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 0} \frac{<f,T_k>^2}{\|T_k\|_2^2} \text{ est convergente.}}$

**9.b)** La série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|_2^2}$ est convergente. Son terme général tend donc vers zéro. Or pour $k > 0$, on a $< T_k, T_k >= \pi/2$ (question 6), donc par produit, la suite de terme général $< f, T_k >^2$ converge vers zéro donc celle de terme général $< f, T_k >$ aussi. Ainsi $\boxed{\text{la suite de terme général } \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\, T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \text{ tend vers zéro.}}$

**10.a)** Sur $[-1; 1]$, on a $|f(x)/\sqrt{x^2-1}\,| \leqslant \|f\|_\infty/\sqrt{x^2-1}$ . Or comme la fonction constante $\|f\|_\infty$ est dans $E$, on a par croissance de l'intégrale à bornes croissantes (les deux membres suivants existant bien)

$$\int_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{x^2-1}}\, dx \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{\|f\|_\infty^2}{\sqrt{x^2-1}}\, dx \quad \text{i.e.} \quad \|f\|_2^2 \leqslant \|f\|_\infty^2 \; < T_0, T_0 >$$

Ainsi d'après la question 6 et en prenant la racine carrée, on obtient $\boxed{\|f\|_2 \leqslant \sqrt{\pi}\; \|f\|_\infty}$

**10.b)** La fonction $f$ est continue sur le segment fermé borné $[-1; 1]$, donc y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le théorème de Weierstrass. On définit alors la suite d'entiers naturels $(\alpha_n = \max(\deg P_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$.
Par définition du polynôme $t_{\alpha_n}(f)$, on a $\|f - t_{\alpha_n}(f)\|_2 \leqslant \|f - P_n\|_2$. La question 10, comme $f - P_n$ est dans $E$, assure $\|f - T_n\|_2 \leqslant \sqrt{\pi}\;\; \|f - P_n\|_\infty$. Ainsi $\|f - t_{\alpha_n}(f)\|_2 \leqslant \sqrt{\pi}\; \|f - P_n\|_\infty$.
Or la suite de terme général $\|f - P_n\|_\infty$ converge vers 0 et par comparaison $(\|f - t_{\alpha_n}\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. Finalement, on obtient:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N | \forall n \geqslant N \quad \|f - t_{\alpha_n}(f)\|_2) < \varepsilon$ (convergence de la suite vers 0)

$\forall p \geqslant \alpha_N \quad \|f - t_p(f)\|_2 \leqslant \|f - t_{\alpha_N}(f)\|_2$ (décroissance de la suite $(d_2(f, E_k))_{k\in\mathbb{N}}$)

et donc $\|f - t_p(f)\|_2 < \varepsilon$

On a donc exactement écrit que $\boxed{\text{la suite } (\|f - t_p(f)\|_2)_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0.}}$

**11.a)** D'après les questions 10.b et 7.a, la suite de terme général $d_2(f, E_n)$ converge vers 0 et donc celle de terme général $(d_2(f, E_n))^2$ aussi. En utilisant la question 8, on obtient donc

$$\boxed{\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{< f, T_k >^2}{\|T_k\|_2^2}}}$$

**11.b)** Soit une fonction $h$ de $E$ telle que $\int_{-1}^{1} \frac{h(t)\, T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 0$ pour tout $n$ autrement dit $< h, T_n >= 0$ pour tout $n$. Alors d'après la question précédente, la norme $\|h\|_2$ est nulle et donc $\boxed{h \text{ est la fonction nulle sur } [-1; 1].}$

## III. Polynômes de meilleure approximation au sens de Tchebychev

**12.** L'espace vectoriel $E_n$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. On considérera donc (ce que suggère l'énoncé) la topologie pour la norme $\| \ \|_\infty$ .

**12.a)** La partie $\boxed{K \text{ est non vide}}$ car elle contient le polynôme nul.
L'application $\psi : Q \in E_n \mapsto \|f - Q\|_\infty - \|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ satisfait pour tout $(P; Q)$ de $E^2$, l'égalité $|\psi(Q) - \psi(P)| = |\|Q - f\|_\infty - \|P - f\|_\infty|$. Or $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $E$ donc vérifie la seconde inégalité triangulaire, ainsi $|\|Q - f\|_\infty - \|P - f\|_\infty| \leqslant \|Q - P\|_\infty$. Cela prouve que $\psi$ est une application 1-lipschitzienne donc continue. L'image réciproque par $\psi$ du fermé $\mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}$ est $\boxed{K \text{ qui est donc un fermé de } E_n.}$
Pour tout $Q$ de $K$, l'inégalité triangulaire assure $\|Q\|_\infty \leqslant \|Q - f\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant 2\,\|f\|_\infty$. Cela démontre bien que $\boxed{K \text{ est une partie bornée de } E_n.}$

**12.b)** L'ensemble $K$ est une partie fermée bornée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, c'est donc $\boxed{\text{une partie compacte de } E_n, \text{ non vide}}$ d'après la question précédente.

**13.a)** Comme $K$ est une partie non vide de $E_n$, on obtient $d_\infty(f, K) \geqslant d_\infty(f, E_n)$.
Par définition de $d_\infty(f, E_n)$, comme le polynôme nul est dans $E_n$, on a $d_\infty(f, E_n) \leqslant \|f\|_\infty$.
Deux cas se présentent donc

- $d_\infty(f, E_n) = \|f\|_\infty$ : dans ce cas, comme $d_\infty(f, K) \leqslant \|f\|_\infty$ puisque 0 est dans $K$, on obtient $d_\infty(f, K) \leqslant d_\infty(f, E_n)$.
- $d_\infty(f, E_n) < \|f\|_\infty$ : dans ce cas, par définition de $d_\infty(f, E_n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $R_\varepsilon$ de $E_n$ vérifiant $d_\infty(f, E_n) \leqslant \|R_\varepsilon - f\|_\infty \leqslant d_\infty(f, E_n) + \varepsilon$. Ainsi pour tout $\varepsilon < \|f\|_\infty - d_\infty(f, E_n)$ (ce dernier réel étant bien strictement positif), le polynôme $R_\varepsilon$ vérifie $\|R_\varepsilon - f\|_\infty \leqslant d_\infty(f, E_n) + \varepsilon < \|f\|_\infty$ donc est en fait dans $K$. Ainsi, il vérifie $d_\infty(f, K) \leqslant \|R_\varepsilon - f\|_\infty$ et finalement $d_\infty(f, K) \leqslant d_\infty(f, E_n) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon$ assez petit, d'où en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 l'inégalité $d_\infty(f, K) \leqslant d_\infty(f, E_n)$.
- Dans les deux cas, on a prouvé l'inégalité $d_\infty(f, K) \leqslant d_\infty(f, E_n)$ et donc d'après l'inégalité trouvée au début de la question, on a bien montré l'égalité $\boxed{d_\infty(f, K) = d_\infty(f, E_n).}$

**13.b)** La fonction $Q \in E_n \mapsto \|Q - f\|_\infty \in \mathbb{R}$ est continue (c'est la somme de $\psi$ (question 12.a) et de la fonction constante donc continue $\|f\|_\infty$). Sa restriction à la partie compacte $K$ (question 12.b) est donc bornée et atteint ses bornes en particulier l'inférieure. Ainsi,
$\boxed{\text{il existe } P \text{ dans } K \text{ donc dans } E_n \text{ vérifiant } \|f - P\|_\infty = d_\infty(f, K) \text{ i.e. } \|f - P\|_\infty = d_\infty(f, E_n)}$
d'après la question 13.a.

**14.a)** D'après la question 3.b, $\boxed{\Phi = T_3/2 \text{ a pour norme } \|\Phi\|_\infty = 1/2 \text{ et équioscille sur les 4 points}}$ $x_l = \cos(l\pi/3)$ avec $l$ variant de 0 à 3.
Voici, le graphe d'une autre fonction qui convient :

**14.b)** C'est exactement le résultat obtenu à la question 3.b. (qui était plus précis que celui demandé par l'énoncé).

**15.a)** Pour tout $x$ de $[-1;1]$, on a $Q(x)-P(x) = Q(x)-f(x)+(f(x)-P(x))$ et $|Q(x)-f(x)| \leqslant \|Q-f\|_\infty$ donc $|Q(x)-f(x)| < \|P-f\|_\infty$. Pour les réels $x_i$, on a de plus $|f(x)-P(x)| = \|P-f\|_\infty$, donc pour ces réels, le signe de $Q(x)-P(x) = Q(x)-f(x)+(f(x)-P(x))$ est bien celui de $f(x)-P(x)$.

**15.b)** Pour tout $i$ de $\{0, ...n\}$, la fonction polynômiale $P-Q$ est continue sur $[x_i; x_{i+1}]$ et $(P-Q)(x_i)$ et $(P-Q)(x_{i+1})$ sont de signes différents (d'après la question 15.a car $f-P$ équioscille sur les $x_i$). Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique donc et assure que $P-Q$ s'annule sur cet intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, en fait sur $]x_i; x_{i+1}[$ car $P-Q$ ne s'annule pas aux bornes (question 15.a). On a donc trouvé card$(\{0, ..n\}) = n+1$ racines au polynôme $P-Q$ qui est de degré au plus $n$ (car dans $E_n$). Ce polynôme est donc le polynôme nul i.e. $\boxed{P = Q}$.

Ce dernier résultat contredit l'hypothèse $\|Q-f\|_\infty < \|P-f\|_\infty$. un tel polynôme $Q$ n'existe donc pas, ce qui signifie que tout polynôme $R$ de $E_n$ vérifie l'inégalité $\|P-f\|_\infty \leqslant \|R-f\|_\infty$ autrement dit $\boxed{P \text{ est un P.M.A.}}$ d'après la caractérisation (ii).

**16.** Le polynôme $q_n = X^{n+1} - 2^{-n}T_{n+1}$ est de degré au plus $n+1$ car $X^{n+1}$ et $T_{n+1}$ sont de degré $n+1$. Le coefficient du terme de degré $n+1$ est $1 - 2^{-n} \times 2^{n+1-1}$ d'après la question 2.c, autrement dit nul. Ainsi $q_n$ est bien de degré au plus $n$ et donc dans $E_n$.
De plus, $f - q_n = 2^{-n}T_{n+1}$ équioscille sur $n+2$ points d'après la question 14.b (le fait de multiplier par une constante non nulle ne change rien au caractère équioscillant), donc la question 15.b assure que $\boxed{q_n \text{ est un P.M.A. d'ordre } n \text{ de } f}$.

**17.** Soit $P$ un polynôme unitaire de degré $n+1$. Alors il existe un polynôme $Q$ de $E_n$ tel que $P = X^{n+1} - Q$. D'après la question 16, on a $\|f - q_n\|_\infty \leqslant \|f - Q\|_\infty$ avec $f : x \mapsto x^{n+1}$. Ainsi, on a par définition de $q_n$, l'inégalité $\|2^{-n}\,T_{n+1}\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$ soit encore $\boxed{2^{-n}\,\|T_{n+1}\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty.}$

**18.a)** Soit $f$ une fonction polynômiale de degré $n+1$ et de coefficient dominant $a$ (donc $a \neq 0$). D'après la caractérisation (i) du P.M.A., on cherche $Q$ dans $E_n$ tel que $\|f-Q\|_\infty$ c'est à dire $|a|\,\|a^{-1}f - a^{-1}Q\|_\infty$ est minimum. Or le polynôme $a^{-1}f$ est de degré $n+1$ et unitaire, et quand $Q$ décrit $E_n$, les polynômes $a^{-1}\,f - a^{-1}Q$ décrivent entièrement l'ensemble des polynômes unitaires de degré $n+1$. Ainsi d'après la question 17, $\|a^{-1}\,f - a^{-1}Q\|_\infty$ est minimum (quand $Q$ décrit $E_n$) pour $a^{-1}\,f - a^{-1}Q = 2^{-n}\,T_{n+1}$.
Finalement, $\boxed{\text{un P.M.A. de } f \text{ est donc } f - 2^{-n}aT_{n+1}}$ (qui est bien un élément de $E_n$).

**18.b)** La fonction polynômiale $x \mapsto 5x^3 + 2x - 3$ est de degré $3 = 2+1$, donc admet un P.M.A. d'ordre 2 qui est $Q = 5x^3 + 2x - 3 - 2^{-2} \times 5T_3(x)$ d'après 18.a. D'après la question 2.b, on a $Q = 5x^3 + 2x - 3 - 5x^3 - \frac{3}{4}x = \boxed{\frac{5}{4}x - 3}$.