

Concours Communs Marocain - Session 2007

Corrigé de l'épreuve d'algèbre

Divers démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre

Corrigé par Mohamed TARQI

PREMIÈRE PARTIE : MÉTHODES ANALYTIQUES

A. Résultats préliminaires

1a. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$||P(z)| - |a_d z^d|| \leq |P(z) - a_d z^d| \leq \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| |z|^k.$$

D'où

$$\left| \frac{|P(z)|}{|a_d| |z|^d} - 1 \right| \leq \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \frac{1}{|z|^{d-k}},$$

la quantité majorante tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini.

1b. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $R > 0$ tel que $\forall |z| > R$, $\left| \frac{|P(z)|}{|a_d| |z|^d} - 1 \right| \leq 1$ ou encore $\frac{1}{2} < \frac{|P(z)|}{|a_d| |z|^d} \leq \frac{3}{2}$. On a nécessairement

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|P(z)|}{|a_d| |z|^d} \leq 2.$$

2a. Soit D un disque fermé borné de $\mathbb{C}$, donc est un compact de $\mathbb{C}$ et comme l'application $z \rightarrow |P(z)|$ est continue sur D alors elle est bornée et atteinte ses bornes. En particulier $\inf_{z \in D} |P(z)|$ existe est bien défini.

2b. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel $|P(z_0)| = \inf_{z \in D} |P(z)|$. D'après la question 2.(b) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty$, alors il existe $R > 0$ tel que $\forall |z| \geq R$, on a $|P(z)| > |P(z_0)|$. Ceci entraîne que $z \rightarrow |P(z)|$ atteinte sa borne inférieure sur le disque fermé $\overline{D}(O, R)$.

B. Première méthode analytique

1a. La continuité de l'application $t \rightarrow \alpha^k Q(\alpha t)$ au point $t = 0$ entraîne l'existence d'un réel R positif tel que $|t| < R$ entraîne $|\alpha^k Q(\alpha t)| \leq \frac{1}{2}$.

Si $R > 1$, alors on a $\forall t_0 \in]0, 1[$, $|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leq \frac{1}{2}$. Si $R < 1$, là encore on a $\forall t_0 \in]0, R[\subset]0, 1[$, $|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leq \frac{1}{2}$.

1b. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} |Q_1(\alpha t_0) - 1 + b(\alpha t_0)^k| &= |Q_1(\alpha t_0) - 1 + t_0^k| \\ &= |\alpha^k t_0^k Q(\alpha t_0)| \\ &\leq \frac{1}{2} t_0^k. \end{aligned}$$

D'où

$$||Q_1(\alpha t_0)| - |1 - t_0^k|| \leq \frac{1}{2} t_0^k,$$

inégalité qui s'écrit encore

$$|Q_1(\alpha t_0)| \leq 1 - \frac{1}{2} t_0^k < 1.$$

2. **Inégalité d'Argand :** Désignant par a_k le premier coefficient non nul qui suit $a_0 = 1$ dans le développement de $Q_1(z)$ suivant les puissances croissantes, nous pouvons écrire :

$$Q_1(z) = 1 + b_k X^k + X^k Q(z)$$

avec Q un polynôme tel que $Q(0) = 0$. Alors d'après la question précédente, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $|Q_1(\alpha t_0)| < 1$ où α une racine k -ième de $\frac{-1}{b_k}$.

Donc, si on prend $\delta = \gamma + \alpha t_0$, on aura $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$.

3. Application : Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes et z_0 un complexe tel que $|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$. Si $P(z_0) \neq 0$, alors d'après la dernière question il existe $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $|P(\delta)| < |P(z_0)|$, ce qui est absurde.

C. Deuxième méthode analytique

1. f est le rapport de deux fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = -\frac{e^{i\theta} P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) = -\frac{ire^{i\theta} P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2} = ir \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta)$$

2a. La fonction $r \rightarrow \frac{1}{P(re^{i\theta})}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, donc d'après le théorème de dérivation sous-signe intégral, la fonction $r \rightarrow F(r)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall r \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} F'(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{ir} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta}(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{ir} [f(r, \theta)]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Car $\theta \rightarrow f(r, \theta)$ est 2π -périodique, donc $\forall r \in \mathbb{R}^*$, $F'(r) = 0$ et puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$, F' est constante sur $\mathbb{R}$.

2b. On sait, d'après la partie préliminaire, qu'il existe $R > 0$ tel que $\forall |z| > R$, on a $\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{2}{|a_d||z|^d}$, donc $\forall r \geq R$, $\frac{1}{|P(re^{i\theta})|} \leq \frac{2}{|a_d|r^d}$ et par conséquent :

$$|F(r)| \leq \frac{4\pi}{r^d}.$$

Donc

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0.$$

2c. On a $F(0) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a_0} = \frac{2\pi}{a_0}$. D'où $\forall r \geq 0$, $F(r) = F(0)$, c'est-à-dire F est une fonction constante, ce qui est en contradiction avec le fait que $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 0$. Donc notre hypothèse, P ne s'annule pas, est fausse. Donc on a montré que tout polynôme non constant à coefficients complexes possède une racine complexe.

DEUXIÈME PARTIE : MÉTHODES ALGÈBRIQUE

A. Premiers résultats

1a. Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ un tel polynôme. Supposons, pour simplifier, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$

$$\exists A \in \mathbb{R}^{+*} \text{ tel que } x \geq A \implies P(x) \geq 1 \text{ et } x \leq -A \implies P(x) \leq -1,$$

en particulier $P(-A) < 0 < P(A)$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]-A, A[$ tel que $P(\alpha) = 0$.

1b. Soit f un endomorphisme de E . Puisque E est de dimension impaire, le polynôme caractéristique de f est donc de degré impaire et par conséquent admet au moins une racine, c'est-à-dire f admet au

moins une valeur propre.

1c. Le polynôme minimal de A divise tout polynôme annulant A , en particulier il divise le polynôme $X^2 + X + 1$. Or le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines, alors A n'a pas de valeurs propres réelles. Mais, puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, l'endomorphisme associé à A a nécessairement des valeurs propres réelles ce qui est absurde.

2a. Soit $x \in \ker(u - \lambda id_E)$. on a

$$u(v(x)) - \lambda v(x) = v(u(x)) - \lambda v(x) = v(\lambda x) - \lambda v(x) = 0$$

donc $v(x) \in \ker(u - \lambda id_E)$, donc $v(\ker(u - \lambda id_E)) \subset \ker(u - \lambda id_E)$. De même on montre $\ker(u - \lambda id_E)$ est stable par u .

Si $y \in \text{Im}(u - \lambda id_E)$, il existe x de E tel que $y = (u - \lambda id_E)(x)$. On a alors

$$u(y) = u((u - \lambda id_E)(x)) = v(u(x)) \in \text{Im}(u - \lambda id_E)$$

donc $u(\text{Im}(u - \lambda id_E)) \subset \text{Im}(u - \lambda id_E)$, de même $\text{Im}(u - \lambda id_E)$ est stable par v .

2b. Le résultat est triviale si u est une homothétie. Supposons que u n'est pas une homothétie. E étant de dimension impaire, donc u admet au moins une valeur propre λ , alors l'un des sous-espaces $\ker(u - \lambda id_E)$ ou $\text{Im}(u - \lambda id_E)$, d'après le théorème du rang, est de dimension impaire, et les deux sont stables par u et v , de plus ils sont des sous-espaces stricts.

3. Dans ces conditions le polynôme caractéristique possède une racine réelle, donc $\text{Sp}(u)$ est non vide. Procédons par récurrence sur n , avec $\dim E = 2n + 1$.

Si $n = 0$, la proposition est évidemment vérifiée, supposons la vérifie pour tout entier $\leq n - 1$.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. L'un des sous-espaces $E_1 = \ker(u - \lambda id_E)$ ou $E_2 = \text{Im}(u - \lambda id_E)$, par exemple E_1 , est de dimension impaire et les deux sont stables par u et v . Soient u_1 et v_1 les endomorphismes de E_1 induites par u et v .

- Si $\dim E_1 = 2k + 1 < 2n + 1$, l'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer que u_1 et v_1 ont un vecteur propre commun, un vecteur propre de u_1 (resp : v_1) est un vecteur propre de u (resp : v).
- Si $\dim E_1 = 2n + 1$, alors $E_1 = E$ et $u = \lambda id_E$ et tout vecteur propre de v est un vecteur propre de u .

B. Endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension impaire

1. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors ${}^t(\lambda M + N) = \lambda {}^t M + {}^t N = \lambda \overline{M} + \overline{N} = \overline{\lambda M + N}$, donc $\lambda M + N \in \mathcal{F}$ et par conséquent $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel réel.

2. Soit $M = (a_{lk})_{1 \leq l, k \leq n}$ une matrice de $\mathcal{F}$, alors $\forall l \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ll} = \overline{a_{ll}}$ et $a_{kl} = \overline{a_{lk}}$ pour $k \neq l$. Donc si on pose $a_{kl} = A_{k,l} + iB_{k,l}$, alors on a d'une manière unique :

$$M = \sum_{k=1}^n a_{ll} E_{ll} + \sum_{k < l} A_{kl} (E_{kl} + E_{lk}) + \sum_{k < l} B_{kl} (i(E_{kl} - E_{lk})).$$

On déduit facilement $\dim \mathcal{F} = n + 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^2$, entier impair.

3a. Il est clair que les applications u et v sont linéaires. Si $M \in \mathcal{F}$, on a

$$\begin{aligned} {}^t(u(M)) &= \frac{1}{2} ({}^t M {}^t A + \overline{{}^t M} M) \\ &= \frac{1}{2} (\overline{M} {}^t A + \overline{A} M) = \overline{u(M)}, \end{aligned}$$

donc $u(M) \in \mathcal{F}$. De même $v(M) \in \mathcal{F}$ et par conséquent u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

3b. Soit $M \in \mathcal{F}$, alors

$$\begin{aligned} u(v(M)) &= u\left(\frac{1}{2}(AM + {}^t \overline{A})\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(A \left[\frac{1}{2i}(AM - M {}^t \overline{A}) \right] + \frac{1}{2i} [(AM - M {}^t \overline{A})]^t \overline{A} \right) \\ &= \frac{1}{4i} (A^2 M - M ({}^t \overline{A})^2) \end{aligned}$$

De même $vu(M) = \frac{1}{4i} (A^2 M - M ({}^t \overline{A})^2)$, et par conséquent $uv = vu$.

u et v sont deux endomorphismes commutables de l'espace vectoriel $\mathcal{F}$, de dimension impaire n^2 , car n

est impaire. Donc d'après la question A.3, u et v possèdent au moins un vecteur propre commun.

3c. Les conditions $u(M_0) = \lambda M_0$ et $v(M_0) = \mu M_0$ sont équivalentes à

$$\begin{cases} AM_0 + M_0^t \bar{A} = 2\lambda M_0 \\ AM_0 - M_0^t \bar{A} = 2i\mu M_0 \end{cases}$$

Donc on a $AM_0 = (\lambda + i\mu)M_0$.

Posons $M_0 = [C_1, C_2, \dots, C_n]$ avec $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de M_0 . Comme $M_0 \neq 0$, il existe $l_0 \in [1, n]$ tel que $C_{l_0} \neq 0$, alors on a nécessairement $AC_{l_0} = (\lambda + i\mu)C_{l_0}$, c'est-à-dire $\lambda + i\mu$ est une valeur propre de A .

4a. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension impaire et A sa matrice dans une base quelconque, d'après la dernière question A admet une valeur propre, ce qui est équivalent à dire que f admet une valeur propre.

4b. Soient u et v deux endomorphismes commutables, donc, d'après la dernière question, leur spectres sont non vides, le même raisonnement de la question A.3 s'applique.

C. Étude du cas général

CI. Étude de l'assertion (i) de $\mathcal{P}_k$

1. Il est clair que $\mathcal{G}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de plus si $M = (a_{kl})_{1 \leq k, l \leq n} \in \mathcal{G}$, alors $2a_{ll} = 0$ pour tout i et $a_{kl} = -a_{lk}$ pour $k < l$, donc $\mathcal{G}$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

2a. Il est clair que les applications u et v sont linéaires. Si $M \in \mathcal{G}$, on a

$$\begin{aligned} {}^t(u(M)) &= {}^tM^t A + \bar{A}^t M \\ &= \bar{M}^t \bar{A} + {}^t A \bar{M} = -u(M), \end{aligned}$$

donc $u(M) \in \mathcal{G}$. De même $v(M) \in \mathcal{F}$ et par conséquent u et v sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

Soit $M \in \mathcal{F}$, alors

$$\begin{aligned} u(v(M)) &= u(AM + M^t A) \\ &= A(AM + M^t A)^t A \\ &= A^2 M^t A + AM({}^t A)^2 \end{aligned}$$

De même $uv(M) = A^2 M^t A + AM({}^t A)^2$, et par conséquent $uv = vu$.

2b. u et v sont deux endomorphismes commutables de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{F}$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1}q$, avec q entier impaire. Donc d'après l'hypothèse de récurrence u et v possèdent au moins un vecteur propre commun.

2ci. Les conditions $u(N_0) = \lambda N_0$ et $v(N_0) = \mu N_0$ sont équivalentes à

$$\begin{cases} AN_0 + N_0^t A = 2\lambda N_0 \\ AN_0^t A = 2i\mu N_0 \end{cases}.$$

Donc on multipliant la première équation par A et on utilisant la deuxième équation, on obtient

$$A^2 N_0 + \mu N_0 - \lambda A N_0 = 0,$$

ou encore

$$(A^2 + \mu I_n - \lambda A)N_0 = 0.$$

2cii. La condition $(A^2 - \lambda A + \mu A)N_0 = (A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)N_0 = 0$ entraîne nécessairement

$$(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n)W = 0.$$

2ciii. Si α n'est pas une valeur propre de A , alors $A - \alpha I_n$ est inversible, donc $(A - \beta I_n)W = 0$ et comme $W \neq 0$, alors β est une valeur propre de A . Ainsi on a montré que toute matrice, et par conséquent tout endomorphisme, admet au moins une valeur propre.

CII. Étude de l'assertion (ii) de $\mathcal{P}_k$

1. D'après la partie CI, $\text{Sp}(g)$ est non vide, donc si f est une homothétie, alors tout vecteur propre de g est un vecteur propre de f .

2a. Les deux sous-espaces F_1 et F_2 étant stables par f et g . Soient f_1 et g_1 les endomorphismes de F_1 (ou F_2) induites par f et g , l'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer que f_1 et g_1 ont un vecteur propre commun, un vecteur propre de f_1 (resp : g_1) est un vecteur propre de f (resp : g).

2b. Les hypothèses entraînent $0 < \dim F_1 < 2^k p$ et $0 < \dim F_2 < 2^k p$. D'après le théorème du rang on a $2^k q + 2^k r = 2^k p$, donc nécessairement $q + r = p$ et par conséquent $q < p$ car $r > 0$. Ainsi on peut utiliser un raisonnement par récurrence descendant.

D. Retour au théorème fondamental de l'algèbre

1. Montrons par récurrence sur n que $\chi_A(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$. Pour $n = 1$, c'est évident.

Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, montrons le au rang n . En développant par rapport à la première ligne, on a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -X & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} - X \end{vmatrix} =$$

$$-X \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & -X & & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} - X \end{vmatrix} - (-1)^n a_0 \begin{vmatrix} 1 & -X & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -X \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et donc d'après l'hypothèse de récurrence

$$\chi_A(X) = (-1)^n X(X^{n-1} - a_{n-1}X^{n-2} - \dots - a_1) + (-1)^n a_0 = (-1)^n (X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0).$$

2. D'après l'étude précédente, l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre, autrement dit, son polynôme caractéristique $(-1)^n P$ admet au moins une racine.

3. Soit P un polynôme non constant, que l'on peut supposer unitaire, soit $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Alors on peut lui associer un endomorphisme f de matrice de type A et d'après la question précédente, f admet au moins une valeur propre, c'est-à-dire son polynôme caractéristique admet une racine. D'où la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

• • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr