

1^{ère} Partie.

Résultats préliminaires.

A-Calcul de la dimension d'un sous espace vectoriel de E .

- 1) Conclusion immédiate du théorème de décomposition des noyaux car $(X - \lambda)^p \wedge Q = 1$, puisque $Q(\lambda) \neq 0$ et du fait que $(u - \lambda I_E)^p$ et $Q(u)$ commutent avec u car sont des polynômes en u , donc leurs noyaux sont stables par u .
- 2) a) $\forall x \in F_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)^p$, on a : $(v - \lambda I_E)^p(x) = (u - \lambda I_E)^p(x) = 0_E$, donc $v - \lambda I_E$ est nilpotent, en particulier $\chi_{v - \lambda I_E}(X) = (-1)^d X^d$, où $d = \dim F_\lambda$.
b)
$$\begin{aligned}\chi_v(X) &= \det(v - X I_E) \\ &= \det(v - \lambda I_E - (X - \lambda) I_E) \\ &= \chi_{v - \lambda I_E}(X - \lambda) \\ &= (-1)^d (X - \lambda)^d\end{aligned}$$
On a $E = F_\lambda \oplus \ker Q(u)$ avec $F_\lambda, \ker Q(u)$ stables par $u, v = u|_{F_\lambda}$ et $w = u|_{\ker Q(u)}$, donc $\chi_u = \chi_v \cdot \chi_w = (-1)^d (X - \lambda)^d \chi_w$.
c) D'après ce qui précède on a : $\chi_u = (-1)^d (X - \lambda)^d \chi_w = (X - \lambda)^p Q$, ainsi $(X - \lambda)^p$ divise $(X - \lambda)^d \chi_w$, or $(X - \lambda)^p \wedge \chi_w = 1$, car $\chi_w(\lambda) \neq 0$, d'où $(X - \lambda)^p$ divise $(X - \lambda)^d$, donc $p \leq d$, de même et puisque $Q(\lambda) \neq 0$, on a aussi $(X - \lambda)^d$ divise $(X - \lambda)^p$, donc $p \geq d$, d'où l'égalité.

B-Un résultat sur le polynôme minimal.

- 1) Posons $\mathcal{J}_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que : } P(u)(x) = 0\}$, on vérifie facilement, tenant compte de la relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$, que $\mathcal{J}_x$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$ car contient π_u , donc engendré par un unique polynôme unitaire de degré minimal noté $\pi_{x,u}$ qui vérifie $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_E$, car $\pi_{x,u} \in \mathcal{J}_x$ et qui divise π_u car $\pi_u \in \mathcal{J}_x$ et $\pi_{x,u}$ engendre $\mathcal{J}_x$.
- 2) $\{\pi_{x,u} \text{ tel que : } x \in E, x \neq 0_E\}$ est fini car inclu dans $\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ qui divisent } \pi_u\}$ qui est fini.
- 3) Posons $\pi = \bigvee_{x \neq 0_E} \pi_{x,u}$, ce polynôme a bien un sens car $\{\pi_{x,u} \text{ tel que : } x \in E, x \neq 0_E\}$ est fini, et il est divisible par tous les polynômes $\pi_{x,u}$, donc $\pi(u)(x) = 0, \forall x \in E$, d'où $\pi_u = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ divise π , car π polynôme annulateur de u , donc $\forall 1 \leq i \leq r, P_i^{\alpha_i}$ divise π , donc $\exists x \in E$ tel que : $x \neq 0_E$, qu'on notera y_i tel que : $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u}$, car P_i est irréductible.
Comme $\pi_u(u) = 0 = P_i^{\alpha_i}(u) \circ \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$, alors
 $E = \ker P_i^{\alpha_i}(u) \oplus \ker \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$ donc $y_i = x_i + z_i$, avec
 $x_i \in \ker P_i^{\alpha_i}(u), z_i \in \ker \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$.
Supposons $x_i = 0_E$, alors $y_i = z_i \in \ker \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$, donc
 $\prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}(u)(y_i) = 0_E$, d'où $\pi_{y_i,u}$ divise $\prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$, or $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u}$, donc
divise aussi $\prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$, impossible car les $P_j^{\alpha_j}$ sont premiers entre eux deux à deux puisque les P_i sont irréductibles deux à deux distincts. Donc $x_i \neq 0_E$.

Montrons maintenant que $\pi_{x_i,u} = P_i^{\alpha_i}$, en effet $R = \pi_{x_i,u}$ divise $P_i^{\alpha_i}$ car $x_i \in \text{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$, mais aussi $S = \pi_{x_i,u}$ divise $\prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$, pour la même raison, donc $R \wedge S = 1$, en utilisant la question suivante on aura $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u} = RS$ et $P_i^{\alpha_i} \wedge S = 1$, donc $P_i^{\alpha_i}$ divise R , d'où l'égalité.

- 4) Supposons $x + y = 0$, donc $y = -x$ et par suite $R(u)(y) = -R(u)(x) = 0$, donc $S = \pi_{y,u}$ divise R , absurde.
D'autre part : $(RS)(u)(x + y) = R(u) \circ S(u)(x + y) = R(u) \circ S(u)(x) + S(u) \circ R(u)(y) = 0$, car $R(u)$ et $S(u)$ commutent, donc $\pi_{x+y,u}$ divise RS .
Or $\pi_{x+y}(u)(x + y) = 0$, donc $\pi_{x+y}(u)(y) = -\pi_{x+y}(u)(x)$, d'où $(R\pi_{x+y,u})(u)(y) = R(u) \circ \pi_{x+y,u}(u)(y) = -R(u) \circ \pi_{x+y,u}(u)(x) = -\pi_{x+y,u}(u) \circ R(u)(x) = 0$, donc $S = \pi_{y,u}$ divise $R\pi_{x+y,u}$, or $S \wedge R = 1$, d'où S divise $\pi_{x+y,u}$, de même R divise $\pi_{x+y,u}$ et comme $S \wedge R = 1$, alors RS divise $\pi_{x+y,u}$, d'où l'égalité.
- 5) Prendre $e = x_1 + \dots + x_r$.

2^{ème} Partie

Étude de $\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que : } \deg \pi_u = n - 1\}$

A-Le cas d'un endomorphisme nilpotent.

- 1) $x \in \text{Ker} v^k \implies v^k(x) = 0 \implies v^{k+1}(x) = v(0) = 0 \implies x \in \text{Ker} v^{k+1}$.
Comme on a déjà $\text{Ker} v^{k+1} \subset \text{Ker} v^{k+2}$, il suffit de montrer l'autre inclusion.
En effet, $x \in \text{Ker} v^{k+2} \implies v^{k+2}(x) = v^{k+1}(v(x)) = 0 \implies v(x) \in \text{Ker} v^{k+1} = \text{Ker} v^k \implies v^k(v(x)) = v^{k+1}(x) = 0 \implies x \in \text{Ker} v^{k+1}$
- 2) Utilisons la contraposée de l'implication précédente, donc $v^{n-1} = 0, v^{n-2} \neq 0 \implies E = \text{Ker} v^{n-1} \neq \text{Ker} v^{n-2}$,
 $\implies \text{Ker} v^{n-2} \neq \text{Ker} v^{n-3}$
 $\vdots$
 $\implies \{0\} = \text{Ker} v^0 \neq \text{Ker} v$
or $\{0\} \subset \text{Ker} v \subset \dots \subset \text{Ker} v^{n-1} = E$, donc les inclusions sont strictes.

- 3) Montrer $k \leq \text{Ker} v^k$, par récurrence sur k en utilisant le fait que $\dim \text{Ker} v^k < \dim \text{Ker} v^{k+1}$, donc $\dim \text{Ker} v^k + 1 \leq \dim \text{Ker} v^{k+1}$.
Montrer $\text{Ker} v^k \leq k$, par récurrence descendante sur k en utilisant le fait que $\dim \text{Ker} v^{k-1} < \dim \text{Ker} v^k$, donc $\dim \text{Ker} v^{k-1} \leq \dim \text{Ker} v^k - 1$.

- 4) Si $\text{Ker} v^{p+1} = \text{Ker} v^p \oplus F$, alors $\dim F = 2$.
De plus $v|_F : F \longrightarrow v(F)$ est bijective car $\text{Ker} v|_F = F \cap \text{Ker} v \subset F \cap \text{Ker} v^p = \{0\}$, donc $\dim v(F) = \dim F = 2$
 $x \in F \implies v^{p+1}(x) = 0$ car $F \subset \text{Ker} v^{p+1}$
 $\implies v(x) \in \text{Ker} v^p$ car $v^p(v(x)) = 0$
Donc $v(F) \subset \text{Ker} v^p$, mais aussi $\text{Ker} v^{p-1} \subset \text{Ker} v^p$, donc $\text{Ker} v^{p-1} + v(F) \subset \text{Ker} v^p$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker} v^{p-1} \cap v(F) &\implies \exists x' \in F \text{ tel que : } x = v(x') \text{ et } v^{p-1}(x) = 0 \\ &\implies \exists x' \in F \text{ tel que : } x = v(x') \text{ et } v^p(x') = 0 \\ &\implies \exists x' \in F \cap \text{Ker} v^p \text{ tel que : } x = v(x') \\ &\implies x = 0 \\ &\text{car } x = v(x') \text{ tel que : } x' \in F \cap \text{Ker} v^p = \{0\} \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker} v^{p-1} \cap v(F) = \{0\}$, d'où $\text{Ker} v^{p-1} \oplus v(F) \subset \text{Ker} v^p$, et donc $\dim \text{Ker} v^p \geq \dim \text{Ker} v^{p-1} + \dim v(F) = \dim \text{Ker} v^{p-1} + 2$. Or $\dim \text{Ker} v^{p-1} \geq p - 1$, d'où $\dim \text{Ker} v^{p-1} \leq p - 2$, or $\dim \text{Ker} v^{p-1} \geq p - 1$, absurde.

- 5) D'après la question 3) on a :
 $0 \leq \dim (\text{Ker} v^{k+1}) - \dim (\text{Ker} v^k) \leq 2$, d'après les questions précédentes on a $\dim (\text{Ker} v^{k+1}) - \dim (\text{Ker} v^k) \notin \{0, 2\}$, donc $\dim (\text{Ker} v^{k+1}) = \dim (\text{Ker} v^k) + 1$, or $\dim (\text{Ker} v^{n-1}) = n$ car $\text{Ker} v^{n-1} = E$, donc par récurrence descendante on montre facilement que $\dim (\text{Ker} v^k) = k + 1$.
- 6) Supposons $\text{Ker} v \subset \text{Im} v$, et soit F un supplémentaire de $\text{Ker} v$ dans $\text{Im} v$, donc $\text{Im} v = \text{Ker} v \oplus F$, d'où
 $\text{Im} v^2 = v(\text{Im} v) = v(F) = \text{Im} v|_F$ et
 $\text{Ker} v|_F = F \cap \text{Ker} v = \{0\}$, d'après la formule du rang appliquée à $v|_F$, on conclut que : $\dim F = \dim \text{Im} v^2 = n - \dim \text{Ker} v^2 = n - 3$ mais aussi, $\dim F = \dim \text{Im} v - \dim \text{Ker} v = n - 2 - 2 = n - 4$, absurde.

- 7) a) Si on montre que $\{y, v(y), \dots, v^{n-2}(y)\}$ est libre, alors $\dim H = n-1$.
En effet : Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ tel que : $\lambda_0 y + \dots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y) = 0$, composons par v^{n-2} , donc $\lambda_0 v^{n-2}(y) = 0$, car $v^{n-1} = 0$ et donc $v^k = 0, \forall k \geq n-1$, or $v^{n-2}(y) \neq 0$, car $y \notin \text{Ker} v^{n-2}$, donc $\lambda_0 = 0$, en composant après par v^{n-3} , on trouve $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite.
- b) Soit $x \in H \cap \mathbb{K}x_0$, donc $x = \lambda x_0 = \lambda_0 y + \dots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y)$, or $x_0 \in \text{Ker} v$, donc x aussi d'où $v(x) = 0$ mais surtout $v^{n-2}(x) = 0$, en reprenant la même démarche que dans la question précédente, on montre que tous les λ_i sont nuls donc $x = 0$, donc $H \cap \mathbb{K}x_0 = \{0\}$, ainsi leur somme est directe, de plus $\dim \mathbb{K}x_0 = 1$, donc $\dim (H \oplus \mathbb{K}x_0) = n$ donc $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E$.
Montrons maintenant H et $\mathbb{K}x_0$ sont stables par v .
Soit $x \in H$, donc $x = \lambda_0 y + \dots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y)$, d'où $v(x) = \lambda_0 v(y) + \dots + \lambda_{n-3} v^{n-2}(y) \in H$, car $v^{n-1} = 0$.
Soit $x \in \mathbb{K}x_0$, donc $x = \lambda x_0$, d'où $v(x) = 0 \in \mathbb{K}x_0$ car $x_0 \in \text{Ker} v$.
- c) $\mathcal{B} = \{y, v(y), \dots, v^{n-2}(y), x\}$ est une base de E car réunion de deux base de H et $\mathbb{K}x_0$ avec $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E$. Dans ce cas

$$J = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B- Cas général.

- 1) a) D'après la forme de M , on a :
 $u(e_1) = e_2, \dots, u(e_{n-2}) = e_{n-1}, u(e_{n-1}) = \alpha_0 e_1 + \dots + \alpha_{n-2} e_{n-1}$ et enfin $u(e_n) = \alpha e_n$. Donc $u^2(e_1) = u(e_2) = e_3$ et par récurrence sur $1 \leq k \leq n-2$, on montre que $u^k(e_1) = e_{k+1}$ et enfin $u^{n-1}(e_1) = u(u^{n-2}(e_1)) = u(e_{n-1}) = \alpha_0 e_1 + \dots + \alpha_{n-2} e_{n-1}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } R(u)(e_1) &= u^{n-1}(e_1) - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k u^k(e_1) \\ &= \alpha_0 e_1 + \dots + \alpha_{n-2} e_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k e_{k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour $k \in \{2, \dots, n-1\}$, on a $e_k = u^{k-1}(e_1)$, donc $R(u)(e_k) = R(u) \circ u^{k-1}(e_1) = u^{k-1} \circ R(u)(e_1) = 0$.

D'autre part $u(e_n) = \alpha e_n$, donc $u^k(e_n) = \alpha^k e_n$ et $R(u)(e_n) = R(\alpha)(e_n) = 0$ car α racine de R .

Ainsi $R(u)$ s'annule sur une base de E , donc sur E , d'où $R(u) = 0$, donc R est un polynôme annulateur de u .

- c) Supposons $\deg \pi_u \leq n-2$, donc $\pi_u = \lambda_0 + \dots + \lambda_{n-2} X^{n-2}$, avec les λ_k non tous nuls. Or $\pi_u(e_1) = 0$ et $u^k(e_1) = e_{k+1}$, donc $\lambda_0 e_1 + \dots + \lambda_{n-2} e_{n-1} = 0$, avec les λ_k non tous, donc la famille $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ est liée, absurde car incluse dans une base. D'après la question précédente on a π_u divise R , et $\deg R = n-1$, donc $\deg \pi_u \leq n-1$, or $\deg \pi_u \geq n-1$, donc $\deg \pi_u = \deg R = n-1$, or π_u divise R et sont tous les deux unitaires donc égaux. D'où $u \in \mathcal{C}$.
- d) En développant suivant la dernière ligne, on trouve que

$$\chi_u = (\alpha - X)\chi_{M'} \text{ où } M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \alpha_{n-3} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{n-2} \end{pmatrix},$$

matrice classique appelée matrice compagnon dont le polynôme caractéristique est exactement $(-1)^{n-1}R$, formule qu'on obtient en développant le déterminant suivant la dernière colonne.

D'où $\chi_u = (-1)^n(X - \alpha)R$.

- 2) a) π_u qui est unitaire de degré $n-1$ divise χ_u de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$, donc $\chi_u = (-1)^n(X - \alpha)\pi_u$, or χ_u et π_u ont les mêmes racines qui sont les valeurs propres de u , donc α qui est racine de χ_u est aussi racine de π_u .
- b) On a $\chi_u = (X - \alpha)^k Q$ et $Q \wedge (X - \alpha)^k = 1$ car $Q(\alpha) \neq 0$,

or $\chi_u(u) = 0$, d'après le théorème des noyaux on conclut que :
 $E = \text{Ker}\chi_u(u) = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k \oplus \text{Ker}Q(u)$.

De façon pareille puisque, $\pi_u = (X - \alpha)^{k-1}Q$ et $\pi_u(u) = 0$, on a aussi $E = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} \oplus \text{Ker}Q(u)$.

En utilisant l'inégalité précédente on conclut que :

$\dim \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k = \dim \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$, or $\text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} \subset \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k$, d'où l'égalité.

D'autre part, supposons que

$\text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$, donc

$E = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \oplus \text{Ker}Q(u) = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \circ Q(u)$, d'après le théorème des noyaux, ainsi $(X - \alpha)^{k-2}Q$ est un polynôme annulateur de u donc divisible par $\pi_u = (X - \alpha)^{k-1}Q$ ce qui est impossible, donc $\text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \neq \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$, or $\text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \subset \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$, d'où l'inclusion est stricte.

- c) i. $\forall x \in \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$, on a $(u - \alpha I_E)^{k-1}(x) = 0$, donc $v^k(x) = 0$.

Or $\text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \neq \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$ donc $v^{k-2} \neq 0$.

ii. Raisonner de façon pareille que dans la question II.A.7

- d) On a $H_1 \subset \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k$ donc

$H_1 \cap \text{Ker}Q(u) \subset \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k \cap \text{Ker}Q(u) = \{0\}$ car $(X - \alpha)^k \wedge Q = 1$ puisque $Q(\alpha) \neq 0$, donc la somme $H_1 + \text{Ker}Q(u)$ est directe. Or $E = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k \oplus \text{Ker}Q(u) = \mathbb{K}x_0 \oplus H_1 \oplus \text{Ker}Q(u) = \mathbb{K}x_0 \oplus H$, avec $H = H_1 + \text{Ker}Q(u)$ stable par u en tant que somme de deux sous espace vectoriel stables par u .

- e) i. Soit $\mathcal{B}'$ une base de H , alors $\mathcal{B} = \{x_0\} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E avec

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \text{ et ceci car } u(x_0) = \alpha x_0, u = w$$

sur H qui est stable par u . Donc $\chi_u = (\alpha - X)\chi_w$.

Or $\chi_u = (-1)^n(X - \alpha)^kQ$, donc $\chi_w = (-1)^{n-1}(X - \alpha)^{k-1}Q = (-1)^{n-1}\pi_u$ et $\pi_u(\alpha) = 0$, donc $\chi_w(\alpha) = 0$, or π_w et χ_w ont les mêmes racines, donc $\pi_w(\alpha) = 0$.

ii. D'abord $\pi_w(u) = 0$ sur H , car $w = u$ sur H , d'autre part, comme

$u(x_0) = \alpha x_0$, alors $\pi_w(u)(x_0) = \pi_w(\alpha)x_0 = 0$, donc $\pi_w(u) = 0$ sur $\mathbb{K}x_0$, et comme $E = \mathbb{K}x_0 \oplus H$, alors $\pi_w(u) = 0$.

Ainsi π_u divise π_w , or $\deg \pi_u = n - 1$ car $u \in \mathcal{C}$, d'où $\deg \pi_w \geq n - 1$ et comme w est un endomorphisme de H et $\dim H = n - 1$, alors $\deg \pi_w \leq n - 1$, d'où l'égalité.

- f) Soit $e \in H$ tel que : $\pi_{e,w} = \pi_w$, et supposons que la famille $\{e, w(e), \dots, w^{n-2}(e)\}$ est liée, donc ils existent des coefficients $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ non tous nuls tels que $\lambda_0 e + \lambda_1 w(e) + \dots + \lambda_{n-2} w^{n-2}(e) = 0$, donc $P(u)(e) = 0$ avec $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-2} X^{n-2}$ de degré inférieur à $n - 2$, or $\deg \pi_{e,w} = n - 1$ ce qui contredit le fait que $\deg \pi_{e,w}$ est un polynôme annulateur pour e de degré minimal. Ainsi $\mathcal{B} = \{e, w(e), \dots, w^{n-2}(e)\}$ est libre dans H de cardinal $n - 1 =$

$$\dim H, \text{ donc base de } H, \text{ avec } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \alpha_{n-3} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{n-2} \end{pmatrix}$$

En prenant $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{x_0\}$, on obtient $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ de la forme (1).

- 3) Le sens direct découle de la question précédente, celui inverse découle de la question II.B.1.c

3^{ème} Partie

- 1) a) On sait que le déterminant est une forme n -linéaire donc continue. D'autre part $G(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $G(\mathbb{R}) = \det^{-1}(]0, +\infty[)$ sont ouverts car $\mathbb{C}^*$ et $]0, +\infty[$ sont ouverts et $\det$ continue.

- b) Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, avec

$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$c_{i,j}^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right), \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}
\|AB\|^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{i,j}^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \\
&= \|A\|^2 \|B\|^2
\end{aligned}$$

c) Montrons d'abord ce résultat, si E est muni d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ et si $x \in E$ tel que : $\|x\| < 1$, alors $(1 - x)$ inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

En effet, on sait que $(1 - x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}$ et

$$\|x^{n+1}\| < \|x\|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } \|x\| < 1, \text{ donc } (1 - x) \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1.$$

Revenons à notre problème maintenant, donc

$$\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1} \implies \|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|H\| < 1$$

$$\implies I_n + A^{-1}H \text{ inversible, d'inverse } \sum_{k=0}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k$$

Donc $A + H = A(I_n + A^{-1}H)$ est aussi inversible, d'inverse

$$(I_n + A^{-1}H)^{-1} A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1} = A^{-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1},$$

$$\text{d'où } (A + H)^{-1} - A^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1}.$$

d) Il suffit de montrer que $\lim_H 0(A + H)^{-1} = A^{-1}$.

En effet, dans ce cas on peut supposer $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ et donc $\exists r < 0$ tel que : $\|A^{-1}H\| < r < 1$, donc

$$\begin{aligned}
\|(A + H)^{-1} - A^{-1}\| &= \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1} \right\| \\
&\leq \|A^{-1}H\| \sum_{k=0}^{+\infty} \|A^{-1}H\|^k \\
&\leq \|H\| \cdot \|A^{-1}\|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \\
&= \frac{\|H\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - r} \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

2) a) Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, donc

$T(x) = \det(xB + (1 - x)A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n (xb_{i,\sigma(i)} + (1 - x)a_{i,\sigma(i)})$ est un polynôme en x de degré inférieur à n non nul, car $T(1) = \det B \neq 0$.

b) i. $\lim_t \frac{1}{2} \gamma(t) = \lim_t \frac{1}{2} \gamma(t) = \frac{1 + 2ir}{2} = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, donc γ est continue et par suite ϕ aussi, or $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$, donc $\phi(0) = A$ et $\phi(1) = B$.

ii. On a $\det \phi(t) = T(\gamma(t))$ et $T(x) = \prod_{i=1}^p x - z_i$, donc $\det \phi(t) =$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^p \gamma(t) - z_i, \text{ or } \operatorname{Im}(\gamma(t) - z_i) &= 2tr - \operatorname{Im} z_i & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\
&= 2r(1 - t) - \operatorname{Im} z_i & \text{si } 0 \leq t \leq 1
\end{aligned}$$

Supposons $\operatorname{Im}(\gamma(t) - z_i) = 0$.

- 1^{er} cas : $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, dans ce cas $\operatorname{Im} z_i = 2tr \leq r$, absurde.

- 2^{ème} cas : $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, dans ce cas $\operatorname{Im} z_i = 2(1 - t)r \leq r$, absurde.

Ainsi $t \mapsto \phi(t)$ est un chemin inclu dans $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$, joignant A et B , donc $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

3) Découle du fait que les applications $P \mapsto PJ, P \mapsto P^{-1}$ sont continues donc leur produit aussi, et du fait que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

$$4) \quad \text{On a : } M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \beta_{n-3} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \beta_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{aligned} \beta &= t\alpha \\ \beta_k &= t\alpha, \forall k \geq 1 \\ \beta_0 &= \beta^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} \beta_k \beta^k \\ \beta^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-2} \beta_k \beta^k \end{aligned}$$

Ainsi $M(t)$ remplit les conditions des matrices de la forme (1), donc $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$.

D'autre part les coefficients de $M(t)$ sont des fonctions polynômiales en t , donc $\psi : t \mapsto M(t)$ est continue, c'est donc un chemin inclu dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$,

joignant $J = \psi(0)$ et $M = \psi(1)$.

- 5) D'après la question précédente toute matrice peut être jointe à J par un chemin continue inclu dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, si on prend deux matrices quelconques M et N dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, on joigne M à J , puis J à N , donc M à N , d'où $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Fin.