

**Partie I**

1- Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , l'application  $(x, \theta) \mapsto \cos(x \sin(\theta) - n\theta)$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ , donc  $J_n$  est bien définie et bornée sur  $\mathbb{R}$ .

2- Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Effectuer le chgt de variable affine  $u = \pi - \theta$  dans l'intégrale définissant  $J_{-n}$ , pour obtenir :

$$J_{-n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\pi - u) - n(\pi - u)) du = (-1)^n J_n(x).$$

3- Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , l'application  $(x, \theta) \mapsto \cos(x \sin(\theta) - n\theta)$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ . Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale,  $J_n$  est de classe  $C^\infty$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$J_n^{(p)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^p}{\partial x^p} (\cos(x \sin(\theta) - n\theta)) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^p(\theta) \cos(x \sin(\theta) - n\theta + p\frac{\pi}{2}) d\theta$$

4- En posant

$$\begin{aligned} g_x(\theta) &= -x^2 \sin^2(\theta) \cos(x \sin(\theta) - n\theta) - x \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta) - n\theta) \\ &\quad + (x^2 - n^2) \cos(x \sin(\theta) - n\theta) \\ &= x \sin(\theta) \sin(n\theta - x \sin(\theta)) + x^2 \cos^2(\theta) - n^2 \cos(x \sin(\theta) - n\theta) \\ &= \frac{d}{d\theta} ((x \cos(\theta) + n) \sin(x \sin(\theta) - n\theta)) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} x^2 J_n(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_x(\theta) d\theta \\ &= [(x \cos(\theta) + n) \sin(x \sin(\theta) - n\theta)]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

5- Cours : Equation différentielle lineaire, sans second membre, du  $2^{sd}$  ordre, résolue en  $y''$  sur  $I = \mathbb{R}_+^*$ , donc l'espace des solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  est de dimension 2.

**Partie II**

1- Lemme de Granwall :

Fixons  $y \in \mathbb{R}_+^*$  et posons  $w(x) = \left( \int_y^x u(t)v(t) dt \right) \exp \left( \int_y^x v(t) dt \right)$  pour  $x > 0$

(a) Si  $F$  désigne une primitive de l'application continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  :  $f : x \mapsto u(x)v(x)$ , et  $V$  celle de l'application  $v$ , alors  $w(x) = (F(x) - F(y)) \exp(V(x) - V(y))$  qui est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme composée d'applications dérivables ( elle est même  $C^1$ ).

On a  $w'(x) = \frac{d}{dx} w(x)$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{u(x)v(x) \exp \left( \int_y^x v(t) dt \right)}_{\frac{d}{dx} \exp \left( \int_y^x v(t) dt \right)} + \left( \int_y^x u(t)v(t) dt \right) \frac{d}{dx} \exp \left( \int_y^x v(t) dt \right) \\ &= \left( u(x) + \int_y^x u(t)v(t) dt \right) \frac{d}{dx} \exp \left( \int_y^x v(t) dt \right) \\ &= \left( \underbrace{u(x) - \int_x^{+\infty} u(t)v(t) dt}_{\leq A} + \int_y^{+\infty} u(t)v(t) dt \right) \frac{d}{dx} \exp \left( \int_y^x v(t) dt \right) \\ &\leq \alpha(y) \frac{d}{dx} \exp \left( \int_y^x v(t) dt \right) \quad \text{car} \quad u(x) - \int_x^{+\infty} u(t)v(t) dt \leq A \end{aligned}$$

D'où

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \quad w'(s) \leq \alpha(y) \frac{d}{ds} \exp \left( \int_y^s v(t) dt \right)$$

(b) Soit  $x \in ]0, y]$ , par intégration de l'inégalité précédente sur  $[x, y]$ , on obtient :

$$w(y) - w(x) \leq \alpha(y) \left[ 1 - \exp \left( \int_y^x v(t) dt \right) \right] = \exp \left( \int_y^x v(t) dt \right) \left[ \alpha(y) \exp \left( \int_x^y v(t) dt \right) - \alpha(y) \right]$$

Or  $w(y) = 0$ , donc  $-w(x) \exp \left( \int_y^x v(t) dt \right) \leq \alpha(y) \exp \left( \int_x^y v(t) dt \right) - \alpha(y)$ , soit encore  $\alpha(y) -$

$$w(x) \exp\left(\int_y^x v(t) dt\right) \leq \alpha(y) \exp\left(\int_x^y v(t) dt\right)$$

En utilisant l'expression de  $w(x)$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha(y) - w(x) \exp\left(\int_y^x v(t) dt\right) &= \alpha(y) + \int_x^y u(t)v(t) dt \\ &= \alpha(y) - \underbrace{\int_y^{+\infty} uv + \int_x^{+\infty} uv}_{=A} = \alpha(x) \end{aligned}$$

et par suite :

$$u(x) \leq \alpha(x) \leq \alpha(y) \exp\left(\int_x^y v(t) dt\right) \text{ avec } 0 < x \leq y.$$

Faisons tendre  $y$  vers  $+\infty$ , dans l'inégalité précédente, en tenant compte de  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \alpha(y) = A$ , il vient :

$$\forall x > 0, \quad u(x) \leq A \exp\left(\int_x^{+\infty} v(t) dt\right)$$

2- Autour de l'équation différentielle  $F_q : y'' + (1+p)y = 0$

(a) Résolution de  $F_0$  : équation différentielle linéaire à coefficients constants, son équation caractéristique est  $r^2 + 1 = 0$ . Donc les solutions réelles sont de la forme  $y = A \cos(x) + B \sin(x)$  où  $A, B$  sont des constantes réelles.

(b) La méthode de variations des constantes permet de conclure : posons  $y(x) = \lambda(x) \cos(x) + \mu(x) \sin(x)$  où  $\lambda, \mu$  sont au moins de classe  $C^1$ .

$y$  est solution de l'équation proposée ssi  $\begin{cases} \lambda' \cos(x) + \mu' \sin(x) = 0 \\ -\lambda' \sin(x) + \mu' \cos(x) = -pf \end{cases}$  ssi

$$\begin{cases} \lambda' = \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ pf & \cos(x) \end{vmatrix} = -pf \sin(x) \\ \mu' = \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & pf \end{vmatrix} = pf \cos(x) \end{cases} \quad \text{Avec } \lambda(x) = -\int_b^x p(t)f(t) \sin(t) dt \text{ et } \mu(x) = \int_b^x p(t)f(t) \cos(t) dt.$$

Les solutions de l'équation différentielle avec second membre sont de la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= A \cos(x) + B \sin(x) + \lambda(x) \cos(x) + \mu(x) \sin(x) \\ &= A \cos(x) + B \sin(x) + \int_b^x f(t) \underbrace{(-p(t) \sin(t) \cos(x) + p(t) \cos(t) \sin(x))}_{k_p(x,t)} dt \end{aligned}$$

(c)  $z$  est solution de  $F_p$  ssi  $z$  vérifie  $z'' + z = -pz$ . Comme en **b**) on obtient  $z(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + \int_b^x z(t)k_p(x,t) dt$  avec ....

3- Soit  $n \in \mathbb{Z}$ .

(a) Soit  $q \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$  tel que  $I_n = \frac{J_n}{q}$  est solution d'une équation différentielle de type  $(F_{p_n})$ , on alors :

$$\begin{aligned} J_n' &= q' I_n + q I_n', \quad J_n'' = q'' I_n + 2q' I_n' + q I_n'' \text{ et puis :} \\ 0 &= (x^2 - n^2) J_n + x J_n' + x^2 J_n'' \\ &= ((x^2 - n^2)q + xq' + x^2 q'') I_n + (xq + 2x^2 q') I_n' + x^2 q I_n'' \quad (**) \end{aligned}$$

L'équation différentielle **(\*\*)** est type  $F_{p_n}$  ssi  $\begin{cases} xq + 2x^2 q' = 0 \\ x > 0 \end{cases}$  et  $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  est une solution qui convient et dans ce cas  $p_n(x) = -\frac{n^2}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{x^3}$  qui est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

(b) .On rappelle  $k_{p_n}(x, t) = -p_n(t) \sin(t) \cos(x) + p_n(t) \cos(t) \sin(x) = -p_n(t)(\sin(x-t))$ .

$$\begin{aligned} \left| I_n = \frac{J_n}{q} \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ car } |J_n| \leq 1, \text{ donc} \\ |I_n(t)k_{p_n}(x, t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{t}} |p_n(t)| = O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) \text{ et comme l'application } t \mapsto I_n(t)k_{p_n}(x, t) \text{ est continue sur } [1, +\infty[, \end{aligned}$$

son intégrabilité sur  $[1, +\infty[$  en résulte.

L'expression de  $k_{p_n}(x, t)$  montre que  $x \mapsto \int_1^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt$  est une combinaison linéaire des fonctions  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .

- (c)  $I_n$  vérifie sur  $\mathbb{R}_+^*$  :  $I_n'' + I_n = -p_n I_n$ , donc d'après 2.c)  $I_n$  est de la forme :  $I_n(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + \int_1^x I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt$  ici  $b = 1$

Or  $\int_1^x I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt = \int_1^{+\infty} - \int_x^{+\infty} = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) - \int_x^{+\infty}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  des constantes réelles (voir

question 3.b) ). Donc  $I_n(x) = C \cos(x) + D \sin(x) - \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt$  avec  $C, D$  des réelles qui ne dépendent -a priori- que de  $n$

- (d)  $|I_n(x)| \leq |C| + |D| + \left| \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t) dt \right|$  qui résulte de  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Inégalité triangulaire} \\ \text{intégrale et valeur absolue} \\ \text{expression de } K_{p_n}(x, t) \end{array} \right.$
- $$\leq |C| + |D| + \int_x^{+\infty} |I_n(t)| |p_n(t)| dt$$

Par le lemme de Granwall (voir question 1.b)

$|I_n(x)| \leq M \exp\left(\int_x^{+\infty} |p_n(t)| dt\right) \leq M \exp\left(\int_1^{+\infty} |p_n(t)| dt\right)$  où  $M = |C| + |D|$  et de plus  $C = D = 0$ , on a  $M = 0$  et puis  $I_n \equiv 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , impossible car  $J_n$  est non nulle.

Remarque : on peut démontrer que  $I_n$  est bornée sans utiliser le lemme de Granwall.

- (e) Par transformation trigonométrique, on a :

$$\begin{aligned} J_n(x) = qI_n &= \frac{1}{q(x)} (A \cos(x) + B \sin(x)) - \frac{1}{q(x)} \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} (A_n \cos(x + \beta_n)) - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt. \end{aligned}$$

$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} |I_n(t)| |k_{p_n}(x, t)| dt \leq \frac{\alpha}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} |p_n(t)| dt$ . où  $\alpha$  est un majorant de  $|I_n|$ .

L'expression de  $p_n$  montre que  $\int_x^{+\infty} |p_n(t)| dt \leq \frac{cte}{x\sqrt{x}} + \frac{cte}{x^{3/2}\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

D'où  $J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (A_n \cos(x + \beta_n)) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$  au voisinage de  $+\infty$ .

### Partie III

Ici  $n \in \mathbb{N}$ .

1- Quelques propriétés de  $J_n$ .

- (a) Pour  $(m, k) \in \mathbb{N}^{*2}$ , on a :

$$\begin{aligned} J_{m-1}^{(k-1)}(0) - J_{m+1}^{(k-1)}(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{(k-1)}(\theta) \cos((m-1)\theta + (k-1)\frac{\pi}{2}) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{(k-1)}(\theta) \cos((m+1)\theta + (k-1)\frac{\pi}{2}) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^k(\theta) (2 \sin(\theta m) \sin(\frac{1}{2}\pi k) - 2 \cos(\theta m) \cos(\frac{1}{2}\pi k)) d\theta \\ &= 2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^k(\theta) (\cos(\theta m + \frac{1}{2}\pi k)) d\theta \\ &= J_m^{(k)}(0) \end{aligned}$$

- (b) Soit  $n > 0$  et  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , on a :

$$J_n^{(0)}(0) = J_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \sin(n\theta) \right]_0^\pi = 0$$

supposons que  $J_n^k(0) = 0$  pour tout  $k \in [0, n-2]$ , on a alors :

$$2J_n^{(k+1)}(0) = J_{n-1}^{(k-1)}(0) - J_{n+1}^{(k-1)}(0) = 0$$

- (c) Calcul de  $J_n^{(n)}(0)$  :

$$2J_n^{(n)}(0) = J_{n-1}^{(n-1)}(0) - J_{n+1}^{(n-1)}(0) = J_{n-1}^{(n-1)}(0). \text{ d'où } J_n^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} J_1^{(1)}(0).$$

Or  $J_1'(0) = \frac{1}{2} (J_0(0) - J_2(0))$  (relation de 3.1.a), donc  $J_1'(0) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$ . D'où finalement  $J_n^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

(d) La formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  autour de 0, donne :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} J_n^{(k)}(0) x^k + o(x^n) = \frac{x^n}{2^n n!} + o(x^n) \text{ car } J_n^{(k)}(0) = 0 \text{ pour tout } k < n.$$

Ceci montre bien que  $J_n(x)$  est de signe de  $\frac{x^n}{2^n n!}$  sur un voisinage pointé en 0, d'où l'existence de  $\alpha > 0$  telle que  $J_n$  est strictement positive sur  $]0, \alpha]$ .

2- C'est du cours : (voir aussi 3-)

3-  $J_n$  solution non nulle sur  $]0, \alpha]$  de  $(E_n) \Leftrightarrow \phi_f = \frac{f}{J_n}$  est solution de l'équation différentielle :  $z'' = \left(2 \frac{J_n'(x)}{J_n(x)} + \frac{1}{x}\right) z' \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \phi_f$  est solution de  $(\varepsilon_n) : z' = \left(-\frac{2n+1}{x} + \psi_n(x)\right) z = 0$ , avec  $\psi_n(x) = \frac{2n}{x} - 2 \frac{J_n'(x)}{J_n(x)}$ .

(a) La solution générale de l'équation différentielle  $(\varepsilon_n)$  est de la forme :  $z(x) = \lambda \exp\left(\int_{\alpha}^x \left(-\frac{2n+1}{t} + \psi_n(t)\right) dt\right)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ , soit  $z(x) = \lambda_n \frac{1}{x^{2n+1}} \exp\left(\int_{\alpha}^x \psi_n(t) dt\right)$  où  $\lambda_n \in \mathbb{R}$ .

(b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , prenons  $\lambda_n = -\frac{1}{2^n n!} \frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n}$ , alors  $y_n(x) = J_n(x) \phi_{y_n}(x)$  est une solution de  $(E_n)$  telle  $\frac{d\phi_{y_n}}{dx} = -\frac{1}{x^{2n+1}} \frac{1}{2^n n!} \frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n} \exp\left(\int_{\alpha}^x \psi_n(t) dt\right) = -\frac{1}{x^{2n+1}} (1 + \zeta_n(x))$ , avec  $\zeta_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n} \exp\left(\int_{\alpha}^x \psi_n(t) dt\right) - 1$ .

Vu l'expression de  $\psi_n$  l'application  $\zeta$  est définie et continue sur  $]0, \alpha]$ . De plus par  $J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} + x^n o(1)$  au voisinage de 0 et  $\exp\left(\int_{\alpha}^x \psi_n(t) dt\right) = \left(\frac{x^n}{J_n(x)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha^n}{J_n(\alpha)}\right)^2$ , on a bien  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \zeta(x) = 0$ .

Pour  $n = 0$ , avec  $\lambda_0 = -\frac{1}{J_0(\alpha)}$ , le calcul direct donne le résultat.

(c) Pour  $n = 0$ , on a  $\frac{d\phi_{y_0}}{dx} = -\frac{1}{x^1} J_0(\alpha) \exp\left(\int_{\alpha}^x \psi_0(t) dt\right) = -\frac{1}{x}$ , donc  $\phi_{y_0}(x) = -\ln(x) + c$  où  $c$  est un réel et puis  $y_0(x) = J_0(x) \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + c\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$  car  $J_0(0) = 1$ .

(d) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{d\phi_{y_n}}{dx} = -\frac{1}{x^{2n+1}} (1 + \zeta_n(x))$ , avec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \zeta_n(x) = 0$ , on reconnaît le développement asymptotique de  $\frac{d\phi_{y_n}}{dx}$  qui s'intègre car  $\zeta$  est prologéable par continuité sur  $[0, \alpha]$ . D'où  $\phi_{y_n}(x) = \frac{1}{2^n x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n}} o(1) \dots$  et puis  $y_n(x) = J_n(x) \frac{1}{2^n x^{2n}} + J_n(x) \frac{1}{x^{2n}} o(1)$ . Mais  $\frac{J_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2^n n!}$ , donc  $y_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ .

5- Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , le thm de Cauchy-lipschitz s'applique, soit alors  $N_n$  une solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $(E_n)$  telle que  $N_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) = y_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  et  $N_n'\left(\frac{\alpha}{2}\right) = y_n'\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

$N_n$  et  $y_n$  coïncident sur  $]0, \alpha]$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} N_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_n(x) = +\infty$ .

6- Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , l'ensemble des solutions  $S_H(E_n)$  de l'équation différentielle  $(E_n)$  est un espace vectoriel de dimension deux, engendré par  $(J_n, N_n)$ . Donc toute solution  $y$  de  $(E_n)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est de la forme :  $y(x) = A J_n(x) + B N_n(x)$  où  $A, B$  sont des constantes réelles.

Comme  $J_n$  est bornée, alors  $y$  est bornée ssi  $B = 0$ . (en prenant  $y = 0$ , ceci permet aussi de montrer que la famille  $(J_n, N_n)$  est libre). D'où  $V$  ensemble des solutions bornées de  $(E_n)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est un sous-espace vectoriel de  $S_H(E_n)$  de dimension 1 engendré par  $J_n$ .

## Partie IV

Remarquons d'abord que :

- la fonction  $f$  est continue, de classe  $C^1$  par morceaux et paire
- la fonction  $g$  est continue, impaire et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

1- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n(g) = 0$  car  $g$  est une fonction impaire de même pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_n(f) = 0$  car  $f$  est paire

Par les relations liants les coefficients de Fourier trigonométriques et les coef. exponentiels et parités des fonctions  $f$  et  $g$ , on a :

$$\begin{cases} a_n(f) = 2c_n(f) \\ b_n(g) = 2ic_n(g) \end{cases} \quad \text{D'autre part on a : } c_n(g') = -inc_n(g), \text{ d'où } a_n(g') = -nb_n(g).$$

Mais  $g' = f - 1$ , donc  $a_n(g') = a_n(f) - \underbrace{\int_0^1 \cos(2n\pi t) dt}_{=0}$  car  $w = \frac{2\pi}{T} = \pi$  et puis  $a_n(g') = a_n(f)$ . par ce qui

précède  $a_n(f) = a_n(g') = -nb_n(g)$ .

2- Pour  $x = 0$ ,  $\int_0^\pi \cos(\theta) d\theta = [\sin(\theta)]_0^\pi = 0$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \neq 0, \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) \cos(\theta) d\theta &= \frac{1}{x} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d(x \sin(\theta)) \\ &= \frac{1}{x} [\sin(x \sin(\theta))]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

(a) Montrons que  $\forall x \in \mathbb{R}, J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \cos(xt) \sqrt{1-t^2} dt$

Avec la transformation  $\cos(x \sin(\theta) - \theta) = \cos(x \sin(\theta)) \cos(\theta) + \sin(x \sin(\theta)) \sin(\theta)$  on a :

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta) - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(x \sin(\theta)) \cos(\theta) + \sin(x \sin(\theta)) \sin(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) \cos(\theta) d\theta}_{=0} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin(\theta)) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin(\theta)) \sin(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \sin(x \sin(\theta)) \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Faisons le chgt de variable  $t = \pi - \theta$ , dans la seconde intégrale, il vient :

$$J_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin(t)) \sin(t) dt$$

Puis par le chgt de variable  $u = \cos(t)$ , on obtient :  $J_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(xu)}{\sqrt{1-u^2}} du$

Et enfin par une intégration par parties  $\begin{cases} U = x \sin(xu) \\ V = \sqrt{1-u^2} \end{cases}$ , on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} J_1(x) &= \int_0^1 U dV = [UV]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 V dU \\ &= -[x \sin(xu) \sqrt{1-u^2}]_{u=0}^{u=1} + \int_0^1 \cos(xu) \sqrt{1-u^2} du \\ &= \int_0^1 \cos(xu) \sqrt{1-u^2} du \end{aligned}$$

Finalement

$$J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \cos(xu) \sqrt{1-u^2} du$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $a_n(f) = 2 \int_0^1 f(t) \cos(2n\pi t) dt = 2 \int_0^1 \cos(2n\pi t) \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2n\pi} J_1(2n\pi)$   
D'où

$$a_n(f) = \frac{1}{2n} J_1(2n\pi).$$

4- Convergence uniforme de la série de Fourier de  $f$

(a) D'après II-3-c), pour  $n$  assez grand :  $J_1(2n\pi) = \frac{A_1}{\sqrt{2n\pi}} \sin(2n\pi + \beta_1) + O(\frac{1}{n^{3/2}}) = \frac{K}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$  avec  $K = \frac{A_1 \sin(\beta_1)}{\sqrt{2\pi}}$ . D'où  $a_n(f) = \frac{1}{2n\pi} J_1(2n\pi) = \frac{Cte}{n^{3/2}} + O(\frac{1}{n^{3/2}}) = O(\frac{1}{n^{3/2}})$

(b) Par  $a_n(f) = O(\frac{1}{n^{3/2}})$ , le terme général de la série de Fourier de  $f$  vérifie  $|a_n(f) \cos(n\pi t)| \leq |a_n(f)| \leq \frac{c^{te}}{n^{3/2}}$ , il y'a convergence normale (donc uniforme) de la série de fourier de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

(a) Voir la remarque ci-dessus...

(b) Résultats du cours (thm de Dirichlet de convergence normale des séries de fourier)

6- Sous les hypothèses  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$f$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$

$f$  est à points de discontinuités réguliers

la conclusion en résulte.

## Partie V

1- Comme  $J_0$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ , et  $t \mapsto e^{-pt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  pour tout  $p > 0$ , alors l'application continue  $t \mapsto J_0(t)e^{-pt}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  pour tout  $p > 0$ .

2- Les inégalités de 5.2) sont immédiates car les fonctions facteur de  $e^{-pt}$  sont majorées en valeur absolue par 1

3- Pour  $p > 0$  fixé, et  $a > 0$ , on a :

$$\left| \int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt} dt - \int_0^a J_0(t)e^{-pt} dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt} dt \right| \leq \frac{e^{-ap}}{p} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$$

D'où  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a J_0(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt} dt$ . Mais

$$\int_0^a J_0(t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^a \left( \int_0^\pi e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) d\theta \right) dt \stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \int_0^a e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right) d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \int_0^a e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right) d\theta \right| \\ = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\pi \left( \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right) d\theta \right| \\ \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right| d\theta \\ \leq \frac{e^{-ap}}{p} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

De ces résultats on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right) d\theta$$

4- Ecrivons  $e^{-pt} \cos(t \sin(\theta)) = \Re(e^{-pt} e^{i(t \sin(\theta))}) = \Re(e^{t(-p+i \sin(\theta))})$ , alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(t \sin(\theta)) dt = \Re \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{t(-p+i \sin(\theta))} dt \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } \int_0^x e^{t(-p+i \sin(\theta))} dt &= \left[ \frac{1}{-p+i \sin(\theta)} e^{t(-p+i \sin(\theta))} \right]_{t=0}^{t=x} \\ &= \left( \frac{-p}{p^2 + \sin^2 \theta} - i \frac{\sin \theta}{p^2 + \sin^2 \theta} \right) (e^{x(-p+i \sin(\theta))} - 1) \end{aligned}$$

et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(-p+i \sin(\theta))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{x(-p+i \sin(\theta))}| = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-xp} = 0$  car  $p > 0$ , on a alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(t \sin(\theta)) dt = \Re \left( \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} + i \frac{\sin \theta}{p^2 + \sin^2 \theta} \right) = \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta}$$

Par  $\int_{\pi/2}^\pi \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta \stackrel{\text{chgt de var } \theta \leftrightarrow \pi/2 - \theta}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta$  on a :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Pour le calcul de l'intégrale  $\int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta$  on fait le chgt de variable  $u = \tan(\theta)$ , alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta &= \int_0^{+\infty} \frac{p}{(p^2 + \frac{u^2}{1+u^2})(1+u^2)} du \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{p}{(p^2 + (1+p^2)u^2)} du \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(\frac{x\sqrt{p^2+1}}{p})}{\sqrt{p^2+1}} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}
\end{aligned}$$

Finalement  $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$  pour tout  $p > 0$