Maths-MPSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

1ère Partie.

A-Quelques propriétés de Φ_u.

1) $\mathcal{T}=\ker \operatorname{tr}$ est un hyperplan car tr est une forme linéaire sur E, non nulle, vu que $\operatorname{tr}(\mathrm{id}_E)=n$.

2) Vérifier rapidement que :
- $\Phi(u,v)=-\Phi(v,u)$, d'où l'antisymétrie.
- $\Phi(u+\lambda v,w)=\Phi(u,w)+\lambda\Phi(u,w)$, d'où la linéarité à gauche, l'antisymétrie en plus implique la linéarité à droite, donc la bilinéarité.

3) a) $\mathrm{id}_E,u,\dots,u^{n-1}$ appartiennent à $\ker\Phi_u$ car commuttent avec u, donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,u,\dots,u^{n-1})\subset\ker\Phi_u$, d'autre part $\{\mathrm{id}_E,u\}$ est libre dans $\ker\Phi_u$, car u n'est pas une homothétie, donc
$\dim\ker\Phi_u\geq 2$.

b) $v\in\ker\Phi_u \Longrightarrow v$ commutte avec u, donc les sous-espaces propres $E_u(\lambda)$ de u sont stables par v.

4) $\mathrm{Im}\Phi\subset\mathcal{T}$ car $\operatorname{tr}(uv)=\operatorname{tr}(vu)$, et aussi $\mathrm{Im}\Phi_u\subset\mathrm{Im}\Phi\subset\mathcal{T}$.
On ne peut pas avoir $[u,v]=\mathrm{id}_E$, car $\operatorname{tr}(\mathrm{id}_E)=n\neq 0$ et $\operatorname{tr}([u,v])=0$.
On ne peut pas avoir $\mathrm{Im}\Phi_u=\mathcal{T}$, car $\dim\mathcal{T}=n^2-1$, alors que $\dim\mathrm{Im}\Phi_u=n^2-\dim\ker\Phi_u\leq n^2-2$.

5) a) L'implication directe est évidente.
Réciproquement, supposons $\{x,u(x)\}$ est liée, donc $\forall x\in E,\exists\lambda_x\in\mathbb{K}$ tel que : $u(x)=\lambda_x.x$, pour montrer que u est une homothétie il suffit de montrer que λ_x ne d"pond pas de x, autrement dit $\lambda_x=\lambda_y$.
Soit $x,y\in E$ non nul.
- 1ér cas : $\{x,y\}$ est liée, donc $y=\alpha x$, d'où $u(y)=\alpha u(x)$, ainsi $\lambda_y.y=\alpha\lambda_x.x=\lambda_x.y$, d'où $\lambda_y=\lambda_x$.
- 2ème cas $\{x,y\}$ est libre.

$$\begin{aligned}u(x+y)=u(x)+u(y) &\Longrightarrow \lambda_{x+y}.(x+y)=\lambda_x.x+\lambda_y.y\\ &\Longrightarrow (\lambda_{x+y}-\lambda_x).x+(\lambda_{x+y}-\lambda_y).y=0_E\\ &\Longrightarrow \lambda_{x+y}=\lambda_x=\lambda_y\end{aligned}$$

6) a) Pour $k=0$, vrai car $(\Phi_u)^0(v)=v$.
Supposons vrai pour k, donc

$$\begin{aligned}(\Phi_u)^{k+1}(v) &= \Phi_u\circ(\Phi_u)^k(v)\\
&= \Phi_u\left(\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}u^{k-p}vu^p\right)\\
&= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}\Phi_u\left(u^{k-p}vu^p\right)\\
&= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}u^{k+1-p}vu^p\\
&-\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}u^{k-p}vu^{p+1}\\
&= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}u^{k+1-p}vu^p\\
&+\sum_{p=1}^{k+1}(-1)^p\begin{pmatrix}p-1\\k\end{pmatrix}u^{k+1-p}vu^p\end{aligned}$$

On remplace p par p-1 dans la 2ème somme

$$= u^{k+1}v+\sum_{p=1}^{k}(-1)^p\left(\begin{pmatrix}p\\k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p-1\\k\end{pmatrix}\right)ku^{k+1-p}vu^p$$
$$+(-1)^{k+1}vu^{k+1}$$

$$= u^{k+1}v + \sum_{p=1}^{k} (-1)^p \begin{pmatrix} p \\ k+1 \end{pmatrix} k u^{k+1-p} v u^p$$
$$+(-1)^{k+1} v u^{k+1}$$
$$= \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \begin{pmatrix} p \\ k+1 \end{pmatrix} k u^{k+1-p} v u^p$$

b) Supposons $u^k = 0$, dans ce cas $(\Phi_u)^{2k}(v) = \sum_{p=0}^{2k} (-1)^p \begin{pmatrix} p \\ 2k \end{pmatrix} k u^{2k-p} v u^p = 0$, car $u^p = 0$ si $p \geq k$ et $u^{2k-p} = 0$ si $p \leq k$.

Donc u nilpotent $\Longrightarrow \Phi_u$ nilpotent.

B-Détermination de l'image de Φ.

1) Si $u = \lambda \mathrm{id}_E$, alors $\mathrm{tr}(u) = \lambda n = 0$, donc $\lambda = 0$, d'où $u = 0$, contradiction, donc u ne peut pas être une homothétie.

2) Comme u n'est pas une homothétie d'aprés I.A.5.a) $\exists e_1 \in E$ tel que : $\{e_1, u(e_1)\}$ soit libre.

3) Prendre $e_2 = u(e_1)$ puis utiliser le théorème de la base incomplète, car $\{e_1, e_2\}$ libre, ainsi, $u(e_1) = e_2$ ne peut pas s'exprimer en fonction de e_1, d'où $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

4) a) Il suffit de prendre α qui n'est pas valeur propre de U.

b) Un calcul trés simple à faire.

5) On a déjà vu que $\mathrm{Im}\Phi \subset \mathcal{T}$ dans I.A.4), montrons l'autre inclusion réciproque par récurrence sur $n = \dim E$.

Pour $n = 1$, $\dim \mathcal{L}(E) = 1$, donc tous les endomprphismes sont proportionnels à id_E, donc des homothéties, d'où $\Phi = 0$, donc $\dim \mathrm{Im}\Phi = 0 = \dim \mathcal{T}$, d'où l'égalité.

Supposons vrai pour $n-1$, donc $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A_1) = 0$, appliquons l'hypothèse de récurrence pour l'endomorphisme canoniquement associé à A_1, donc $A_1 = UV - VU$, d'où $A = U'V' - V'U'$, avec $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V \end{pmatrix}$ où α, S, R vérifient la question précédente, choisis tels que $U - \alpha I_{n-1}$ inversible, $S = (U - \alpha I_{n-1})^{-1} Y$ et $R = -{}^t((U - \alpha I_{n-1})^{-1})X$.

Soit u', v' les endomorphismes canoniquement associés à U' et V', alors $u = u'v' - v'u' \in \mathrm{Im}\Phi$.

C-Détermination de $\mathrm{tr}(\Phi_u)$.

1) La famille $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est de cardinal $n^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

En effet supposons $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0$, donc $\forall 1 \leq k \leq n$, on a $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j} u_{i,j}(e_k) = 0$, d'où $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{i,j} \delta_{j,k} e_i = 0$, d'où $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{i,k} e_i = 0$, d'où $\lambda_{i,k} = 0, \forall 1 \leq i, k \leq n$, car la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

2) Pour tout $1 \leq p \leq n$, on a : $u_{i,j} u_{k,l}(e_p) = \delta_{l,p} u_{i,j}(e_k) = \delta_{l,p} \delta_{j,k} e_i = \delta_{j,k} u_{i,l}(e_p)$, d'où $u_{i,j} u_{k,l} = \delta_{j,k} u_{i,l}$ car ils coincident sur la base $(e_p)_{1 \leq p \leq n}$.

On a $u = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} u_{k,l}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\Phi_u(u_{i,j}) &= u u_{i,j} - u_{i,j} u \\
&= \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} u_{k,l} u_{i,j} - \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} u_{i,j} u_{k,l} \\
&= \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} \delta_{l,i} u_{k,j} - \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} \delta_{j,k} u_{i,l} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{1 \leq l \leq n} a_{j,l} u_{i,l} \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{1 \leq k \leq n} a_{j,k} u_{i,k}
\end{aligned}$$

On remplace l par k dans la 2ème somme

3) D'aprés la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_u(u_{i,j}) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_{k,i} u_{k,j} + a_{i,i} u_{i,j} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} a_{j,k} u_{i,k} - a_{j,j} u_{i,j} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} a_{j,k} u_{i,k} + (a_{i,i} - a_{j,j}) u_{i,j}
\end{aligned}$$

Ainsi les termes diagonaux de la matrice de Φ_u dans la base $(u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, sont les $a_{i,i}-a_{j,j}$ tel que : $1\leq i,j\leq n$, d'où $\mathrm{tr}(\Phi_u)=\sum_{1\leq i,j\leq n}(a_{i,i}-a_{j,j})=\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{i,i}-\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{j,j}=0$ car i,j jouent des rôles symétriques.

$2^{\text{ème}}$ Partie.

A-Cas où u est diagonalisable.

1) a) $A=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j})=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}$ est diagonale, d'aprés I.C.2), $\Phi_u(u_{i,j})=a_{i,i}u_{i,j}-a_{j,i}u_{i,j}=(\mu_i-\mu_j)u_{i,j}$.

b) D'aprés la question précédente, $\mu_i-\mu_j$ sont des valeurs propres, dont les vecteurs propres associés sont les $(u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ qui forment une base de $\mathcal{L}(E)$, ainsi Φ_u admet une base propre donc diagonalisable.

2) $v\in\ker\Phi_u\Longrightarrow v(E_u(\lambda_i))\subset E_u(\lambda_i),\forall 1\leq i\leq p$, d'aprés I.A.3.a).

Inversement supposons $v(E_u(\lambda_i))\subset E_u(\lambda_i),\forall 1\leq i\leq p$, et montrons que $vu=uv$, il suffit alors de le montrer sur la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

En effet $e_i\in E_u(\mu_i)\Longrightarrow v(e_i)\in E_u(\mu_i)\Longrightarrow uv(e_i)=\mu_i v(e_i)$, or $vu(e_i)=v(\mu_i e_i)=\mu_i v(e_i)$, d'où l'égalité.

3) Posons $\Psi:\begin{array}{ccc}\ker\Phi_u & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_u(\lambda_1))\times\cdots\times\mathcal{L}(E_u(\lambda_p))\\ v & \longmapsto & (v_{|E_u(\lambda_1)},\cdots,v_{|E_u(\lambda_1)})\end{array}$

Ψ est bien définie car les sous-espaces propres $E_u(\lambda_i)$ sont stables par tout $v\in\mathrm{Ker}\Phi_i$ qui y induit un endomorphisme.

Ψ est linéaire, car $(v+\lambda w)_{|E_u(\lambda_i)}=v_{|E_u(\lambda_i)}+\lambda w_{|E_u(\lambda_i)}$, pour tous $v,w\in\mathrm{Ker}\Phi_i$.

Ψ est injective, car $v\in\mathrm{Ker}\Phi_i\Longrightarrow v=0$ sur $E_u(\lambda_i)\forall 1\leq i\leq p$, donc $v=0$ sur $\bigoplus_{i=1}^{p}E_u(\lambda_i)=E$ car u est diagonalisable.

Enfin, Soit $(v_1,\cdots,v_p)\in\mathcal{L}(E_u(\lambda_1))\times\cdots\times\mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$, cherchons $v\in\ker\Phi_u$ tel que : $\Psi(v)=(v_1,\cdots,v_p)$, pour cela, tout $x\in E$ s'écrit de façon unique sous la forme, $x=x_1+\cdots+x_p$ tel que : $x_i\in E_u(\lambda_i)$, posons $v(x)=v_1(x_1)+\cdots+v_p(x_p)$ il est clair que $v_{|E_u(\lambda_i)}=v_i$ et donc $v(E_u(\lambda_i))=v_i(E_u(\lambda_i))\subset E_u(\lambda_i)$, d'où $v\in\ker\Phi_u$ et $\Psi(v)=(v_1,\cdots,v_p)$. Donc Ψ est surjective.

Ainsi Ψ définit un isomorphisme de $\ker\Phi_u$ vers $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1))\times\cdots\times\mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$.

Donc $\dim(\ker\Phi_u)=\dim(\mathcal{L}(E_u(\lambda_1))\times\cdots\times\mathcal{L}(E_u(\lambda_p)))=\sum_{i=1}^{p}\dim(\mathcal{L}(E_u(\lambda_i)))=\sum_{i=1}^{p}\dim(E_u(\lambda_i))^2=\sum_{i=1}^{p}m_i^2$, car u est diagonalisable, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{Im}\Phi_u)=\dim(\mathrm{Im}\Phi_u)=\dim(\mathcal{L}(\mathcal{L}(E)))-\dim(\ker\Phi_u)=(n^2)^2-\sum_{i=1}^{p}m_i^2$

4) Si u n'admet que des valeurs propres distinctes alors elles sont toutes simples, donc $m_i=1,\forall 1\leq i\leq n$, d'où $\dim(\ker\Phi_u)=n$.

$\mathrm{id}_E,u,\ldots,u^{n-1}\in\ker\Phi_u$ car commuttent avec u, donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,u,\cdots,u^{n-1})\subset\ker\Phi_u$.

D'autre part, supposons $(\mathrm{id}_E,u,\ldots,u^{n-1})$ est liée, alors ils existeraient des scalaires, $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n-1}$ non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k u^k=0$, d'où $P(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k X^k$ est un polynôme annulateur de u, non nul de degré inférieur à $n-1$, impossible car $\deg\pi_u=n$ puisque u admet n valeurs propres.

Donc $\dim(\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,u,\cdots,u^{n-1}))=n=\dim(\ker\Phi_u)$ et $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,u,\cdots,u^{n-1})\subset\ker\Phi_u$, d'où l'égalité.

B- Cas où $\dim E=2$.

1) u n'est pas une homothétie, donc $\exists e\in E$ tel que : $\mathcal{B}=(e,u(e))$ libre dans E, d'aprés I.A.5.a), donc base de E car $\dim E=2$.

Soit $v\in\ker\Phi_u$, donc $uv=vu$, montrons que $v\in\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,u)$, c'est à dire $v=\lambda\mathrm{id}_E+\mu u$

Soit $U = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ et $V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, montrons alors que $V = \lambda I_n + \mu U$, il suffit de prendre $\lambda = a$ et $\mu = c$ en utilisant le fait que $UV = VU$.

Ainsi $\ker \Phi_u \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u)$, l'autre inclusion est évidente car id_E et u commuttent avec u.

2) $\chi_{\Phi_{|\ker \Phi_u}}$ divise χ_{Φ_u}, car $\ker \Phi_u$ stable par Φ_u, or $\dim \ker \Phi_u = 2$ et 0 est l'une valeur propre de $\Phi_{|\ker \Phi_u}$, donc $\chi_{\Phi_{|\ker \Phi_u}} = X^2$, d'où $\chi_{\Phi_u} = X^2(X^2 + \beta)$.

3) Si $\beta = 0$, alors $\chi_{\Phi_u} = X^4$, si de plus Φ_u est diagonalisable, alors $\pi_{\Phi_u} = X$, car ses racines simples, or $\pi_{\Phi_u}(\Phi_u) = 0$, d'où $\Phi_u = 0$, donc $\ker \Phi_u = \mathcal{L}(E)$, donc u est une homothétie, contradiction.

4) Supposons $\beta \neq 0$.
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit $\lambda, -\lambda$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $X^2 + \beta = 0$, ce sont des racines simples de χ_{Φ_u} et 0 est une valeur propre double, dont l'espace propre associé est de dimension 2, donc Φ_u diagonalisable.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\beta < 0$, pareil que le 1ér cas.
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, dans ce cas χ_{Φ_u} n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, car admet des racines complexes, non réelles, donc Φ_u n'est pas diagonalisable.

5) a) Reprendre le raisonnement fait dans la question précédente.

b) $\Phi_u(v) = \lambda v$, donc $uv - vu = \lambda v$, supposons v inversible, donc $u - vuv^{-1} = \lambda id_E$, d'où $\left[uv^{-1}, \frac{v}{\lambda}\right] = \mathrm{id}_E$, impossible car $\mathrm{id}_E \notin \mathrm{Im}\Phi$.

$v = \frac{\lambda}{(}uv - vu)$, donc $\mathrm{tr} v = \frac{\lambda}{\mathrm{tr}(uv) - \mathrm{tr}(vu)} = 0$.

Puisque, $\dim E = 2$, alors $\chi_v = v^2 - \mathrm{tr}(v)v + \det v$, or $\det v = 0$ car v n'est pas inversible et $\mathrm{tr}(v) = 0$, d'où $\chi_v = v^2$, comme $\chi_v(v) = 0$, alors $v^2 = 0$.

c) Détermination de $\mathrm{Sp}(u)$.
- $$\begin{array}{lll} \mathcal{B} = (e, v(e)) \text{ base de } E & \Longleftrightarrow (e, v(e)) & \text{libre dans } E \\ & & \text{car } \dim E = 2 \\ & \Longleftrightarrow v(e) \neq \lambda e & \text{tel que : } \lambda \in \mathrm{Sp}(v) \\ & \Longleftrightarrow v(e) \neq 0_E & \text{car } \mathrm{Sp}(v) = \{0\} \\ & & \text{puisque } v^2 = 0 \end{array}$$
- Posons $u(e) = ae + bv(e)$, et donc $vu(e) = av(e)$ car $v^2 = 0$
$$\begin{aligned} uv - vu = \lambda v &\Longrightarrow uv(e) = vu(e) + \lambda v(e) \\ &\Longrightarrow uv(e) = (a + \lambda)v(e) \end{aligned}$$
D'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a + \lambda \end{pmatrix}$

Ainsi $\mathrm{tr}(u) = 2a + \lambda$, d'où $a = \frac{\mathrm{tr}(a) - \lambda}{2}$ et

$\mathrm{Sp}(u) = \left\{ a = \frac{\mathrm{tr}(a) - \lambda}{2}, a + \lambda = \frac{\mathrm{tr}(a) + \lambda}{2} \right\}$.

Donc u est diagonalisable car admet 2 valeurs propres distinctes, et $\dim E = 2$.

d) v non inversible, donc $\ker v \neq \{0_E\}$, et $v \neq 0$, donc $\ker v \neq E$, d'où $\dim \ker v = 1$, de même $\dim \ker w = 1$

Supposons $\ker v \cap \ker w \neq \{0_E\}$, alors $\ker v = \ker w$, vu que $\dim \ker v = \dim \ker w = 1$.

Cas où Φ_u est diagonalisable.

1) $uv_i - v_i u = \beta v_i$, donc $uv_i(x) = v_i u(x) + \beta v_i(x) = (\lambda_i + \beta)v_i(x)$ car $u(x) = \lambda_i x$.

Donc $v_i(x)$ sont des vecteurs propres de u.

2) Il est clair que Ψ est linéaire.

Surjection : Soit $y \in E$.
- Si $y = 0_E$, prendre $v = 0$.
- Si $y \neq 0_E$, on complète x et y pour avoir deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ qui commencent par x et y, et soit v l'application linéaire qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$, donc $v(x) = y$.

3) $(v_1, \ldots, v_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$, donc son image par Ψ est génératrice de $\mathrm{Im}\Psi = E$ car Ψ est surjective, ainsi $(v_1(x), \ldots, v_{n^2}(x))$ est une famille génératrice de E formée par des vecteurs propres de u, de la quelle on peut extraire une base de E, donc u est diagonalisable.

3$^{\text{ème}}$ Partie.

1) a) Découle immédiatement de l'égalité $uv - vu = \lambda v$.

b) Supposons $\det v \neq 0$, la question précédente implique que $\det(u - x\mathrm{id}_E) = \det(u - (x+\lambda)\mathrm{id}_E)$, donc $\chi_u(x) = \chi_u(x+\lambda), \forall x \in \mathbb{K}$.

Supposons χ_u n'est pas constant, soit $x \in \mathbb{C}$ racine de χ_u, alors $x+\lambda, x+2\lambda, ...$ sont des racines de χ_u qui est donc nul car admet une infinité de racines, ce qui est impossible, donc χ_u est constant.

c) Si v est inversible, alors $\det v \neq 0$, donc χ_u est constant, d'où $\deg u = 0$, ce qui est impossible car $\dim E = \deg \chi_u$

2) Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$

Pour $k = 1$, c'est vrai car v vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre à la valeur propre λ.

Supposons vrai pour k, dans ce cas $\Phi_u(v^{k+1}) = uv^{k+1} - v^{k+1}u = (uv)v^k - v^{k+1}u = (vu + \lambda v)v^k - v^{k+1}u = v(uv^k - v^k u) + \lambda v^{k+1} = v\Phi_u(v^k) + \lambda v^{k+1} = (k+1)\lambda v^{k+1}$.

Si $v^p \neq 0$, alors c'est un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre $p\lambda$.

3) Si $v^p \neq 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$, alors Φ_u aurait une infinité de valeurs propres distinctes, les $p\lambda$, absurde, donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $v^p = 0$.

4) a) $\mathrm{Im}v^p$ est stable par v, car v^p commute avec v.

D'autre part, soit $y = v^p(x) \in \mathrm{Im}v^p$, on a $uv^p = v^p u + p\lambda v^p$, d'aprés III.2, donc $u(y) = uv^p(x) = v^p(u(x) + p\lambda x) \in \mathrm{Im}v^p$, d'où $\mathrm{Im}v^p$ est aussi stable par u.

b) On a : $v_1 : \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}v^p & \longrightarrow & \mathrm{Im}v^p \\ x & \longmapsto & v(x) \end{array}$ avec $\ker v_1 = \ker v \cap \mathrm{Im}v^p \subset \ker v$,

donc $\dim \ker v_1 \leq 1$ et $\mathrm{Im}v_1 = v(\mathrm{Im}v^p) = \mathrm{Im}v^{p+1}$. D'aprés la formule du rang, on a : $\dim \mathrm{Im}v^p = \dim \ker v_1 + \dim \mathrm{Im}v^{p+1}$.

Supposons $\ker v_1 = \{0_E\}$, donc $v^{p+1}(x) = 0 \Longrightarrow v^p(x) \in \ker v_1 \Longrightarrow v^p(x) = 0$

c)
$$\begin{aligned} \dim \ker v = 1 &\Longrightarrow \dim \mathrm{Im}v = n-1 \\ &\Longrightarrow \dim \mathrm{Im}v^2 = \dim \mathrm{Im}v - 1 = n-2 \\ &\ \ \vdots \\ &\Longrightarrow \dim \mathrm{Im}v^{n-1} = 1 \\ &\Longrightarrow \dim \mathrm{Im}v^n = 0 \end{aligned}$$

Donc $v^{n-1} \neq 0$ et $v^n = 0$.

5) $\mathrm{card}\mathcal{B} = n = \dim E$, il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est libre.

En effet : Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que : $\lambda_0 e + \ldots + \lambda_{n-1}u^{n-1}(e) = 0$, on compose par u^{n-1}, donc $\lambda_0 u^{n-1}(e) = 0$, d'où $\lambda_0 = 0$, puis on compose par u^{n-2} pour montrer que $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) a) Il suffit de définir w_0 sur la base $\mathcal{B}$, pour cela posons $w_0(v^k(e)) = \Phi_u(v^k)(e)$, d'aprés III.2, on a $w_0(v^k(e)) = k\lambda v^k(e)$, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = \mathrm{Diag}(0, \lambda, \ldots, (n-1)\lambda)$

b) $\forall w \in \mathcal{A}$, on a $w - w_0 \in \ker \Phi_v$, d'où $\mathcal{A}$ est un espace affine de direction $\ker \Phi_v$ et d'origine w_0.

c) Montrons que $(\mathrm{id}_E, v, \ldots, v^{n-1})$ base de $\ker \Phi_v$.

Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que : $\lambda_0 \mathrm{id}_E + \ldots + \lambda_{n-1}v^{n-1} = 0$, on applique l'égalié à e, donc $\lambda_0 e + \ldots + \lambda_{n-1}v^{n-1}(e) = 0$, or $\mathcal{B}$ libre, donc $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, donc la famille est libre.

D'autre part, soit $w \in \ker \Phi_v$, donc commute avec v mais aussi avec v^k pour $0 \leq k \leq n-1$, or $\mathcal{B}$ base de E, donc $w(e) = \lambda_0 e + \ldots + \lambda_{n-1}v^{n-1}(e) = P(v)(e)$, et $wv^k(e) = v^k w(e) = v^k P(v)(e) = P(v)(v^k(e))$, d'où $w = P(v)$ car égaux sur la base $\mathcal{B}$, donc notre famille est génératrice pour $\ker \Phi_v$, donc base et par suite sa dimension vaut n.

7) Posons $u(e) = \lambda_0 e + \ldots + \lambda_{n-1}v^{n-1}(e) = P(v)(e)$, on a $\Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$, d'où $uv^k = v^k u + k\lambda v^k$, d'où $uv^k(e) = v^k P(v)(e) + k\lambda v^k(e)$, or $v^n = 0$, donc $vP(v) = \lambda_0 v(e) + \ldots + \lambda_{n-2}v^{n-1}(e)$, $v^2 P(v) = \lambda_0 v^2(e) + \ldots + \lambda_{n-3}v^{n-1}(e)$, ..., $v^{n-1}P(v)(e) = \lambda_0 v^{n-1}(e)$, d'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_0+\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-2} & \dots\lambda_1 & \lambda_0+(n-1)\lambda \end{pmatrix}$

8) Posons $\mathcal{B}' = (e_0, \dots, e_{n-1})$, donc $u(e_k) = (\alpha + k\lambda)e_k = \alpha_k e_k$.

Soit $v \in E_{\Phi_u}(\lambda)$, donc $uv - vu = \lambda v$, posons $v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e_k$, donc $uv(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u(e_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \alpha_k e_k$ et $vu(e_0) = \alpha_0 v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \alpha_0 e_k$, or $\lambda v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \lambda e_k$, d'où $\lambda_k\alpha_k - \lambda_k\alpha_0 = \lambda_k\lambda$, donc $\lambda_k(\alpha_k - \alpha_0 - \lambda) = 0$, donc $(k-1)\lambda\lambda_k = 0$, d'où $\lambda_k = 0$ si $k \neq 1$, ainsi la 1ère colonne de la matrice de u sera de la forme suivante : $\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

En adoptant le même raisonnement pour calculer $v(e_1)$, on trouve que la 2éme colonne est de la forme suivante $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et ainsi de suite la forme finale de la matrice sera $\begin{pmatrix} 0 & \dots & & & 0 \\ a_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

Ces matrices forment un ev de dimension $n-1$.

$\boxed{\text{Fin.}}$