SÉRIE $n°26$

Coniques

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Pour les coniques suivantes, déterminer la nature, les éléments caractéristiques et une équation réduite :

1. $x^2 - xy + y^2 = 12$.
2. $x^2 + \sqrt{3}xy + x - 2 = 0$.
3. $2xy - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$.
4. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}xy + \dfrac{3}{4}y^2 - (1+3\sqrt{3})x - (3-\sqrt{3})y + 13 = 0$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des centres, des sommets et des foyers des ellipses d'équation

$$\lambda x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

lorsque λ décrit $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 3

Soit ε l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Soit m un réel. Déterminer les droites de coefficient directeur m qui sont tangentes à ε.
2. A quelle condition les droites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont elles perpendiculaires ?
3. En déduire que le lieu des points du plan par lesquels passent deux tangentes à ε qui sont perpendiculaires est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 4

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points $A(1,0)$ et $B(1,0)$. On désigne par ε l'ensemble des points du plan dont la somme des carrés aux trois côtés du triangle OAB est égale à $\dfrac{1}{3}$.

1. Démontrer que ε est une ellipse dont on donnera une équation réduite.
2. Montrer que l'ellipse ε est tangente aux droites (OA) et (OB).
3. Donner une représentation paramétrique de ε dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 5

Soit p un réel positif et $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer l'axe, le sommet, le foyer F et la directrice D de $\mathscr{P}$.
2. On considère la représentation paramétrique $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$ de $\mathscr{P}$. Écrire l'équation de la tangente à $\mathscr{P}$ au point de paramètre t.
3. Soit M_0 de coordonnées (x_0, y_0) un point du plan. Écrire une équation vérifiée par le paramètre t d'un point de $\mathscr{P}$ pour que la tangente à $\mathscr{P}$ en ce point passe par M_0. Discuter selon la position de M_0 le nombre de tangentes à $\mathscr{P}$ passant par M_0.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M_0 pour qu'il passe par M_0 deux tangentes à $\mathscr{P}$ perpendiculaires entre elles.
5. Soit M un point de $\mathscr{P}$, H son projeté orthogonal sur D. Montrer que tout point de la tangente en M à $\mathscr{P}$ est équidistant de H et F.
6. En déduire une construction à la règle et au compas des tangentes à $\mathscr{P}$ menées par un point M_0 du plan (dans le cas où il existe de telles tangentes). Retrouver ainsi les résultats de la question 3.
7. Déduire de la question précédente une nouvelle démonstration du résultat de la question 4.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Écrire l'équation de l'hyperbole $\mathscr{H}$ de foyer $F(3,2)$, de directrice D d'équation $x_y + 1 = 0$ et d'excentricité $\sqrt{2}$.
2. Écrire l'équation de $\mathscr{H}$ sous la forme $(x-a)(y-b) = c$ pour des réels a, b, c. En déduire les coordonnées du centre Ω de $\mathscr{H}$.
3. Déterminer les axes, puis le second couple foyer-directrice (F', D') de $\mathscr{H}$ (on donnera les coordonnées de F' et une équation de D').
4. Montrer que la courbe $\mathscr{E}$ d'équation $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 14x - 26y + 27 = 0$ est une ellipse.
5. Montrer que Ω est le centre de $\mathscr{E}$.
6. Déterminer les axes et l'équation réduite de $\mathscr{E}$.
7. En déduire les longueurs des axes, la distance focale et l'excentricité de $\mathscr{E}$.
8. Montrer que les coniques $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}$ ont les mêmes foyers.

PROF : M.TARQI

Exercice 7

On donne un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère les cercles $\mathscr{C}$ d'équation :

$$(x-m)^2+y^2=R^2-m^2 \quad (1)$$

où m est un paramètre réel et R un nombre positif donné.

1. Former l'équation qui détermine m quand $\mathscr{C}$ passe par un point donné S, de coordonnées (x, y).
2. Montrer que le problème admet une solution unique si S appartient à une ellipse $\mathscr{E}$.
3. Dans quelle région, limitée par l'ellipse, doit se trouver S pour que le problème admette deux solutions ?

Exercice 8

Soient A et B deux points distincts du plan et soit I le milieu de $[AB]$. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $MI^2 = MA \times MB$.

•••••••••