SÉRIE $n°21$

Espace préhilbertiens réels

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$(f|g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

Exercice 2

Montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2).$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Exercice 3

$\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique. Orthonormaliser la base :

$$u_1 = (1,1,0); \ \ u_2 = (1,0,1); \ \ u_3 = (0,1,1).$$

Exercice 4

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer que

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \text{ et } (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 5

On muni l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$$(P|Q) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

Soit $(P_0, P_1, ..., P_n)$ la base orthonormalisée de la base canonique $(1, X,^2, ..., X^n$. Pour tout $k \in [0,n]$, on pose :

$$L_k = \frac{1}{\sqrt{2k+1}} P_k.$$

(ces polynômes s'appellent les polynômes de **LEGENDRE**)

1. Calculer les polynômes L_0, L_1, L_2, L_3.
2. Démontrer que pour tout n, le polynôme L_n possède n racines réelles distinctes appartenant toutes à l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 6

Soit D la droite vectorielle dirigé par $u = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, muni de la base orthonormée $B = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Déterminer la matrice relativement à B de la projection orthogonale p sur D et en déduire celle de la projection orthogonale sur $D^\perp$.

Exercice 7

Soit E un espace euclidien et p un endomorphisme de E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si

$$p \circ p = p \text{ et } \forall x \in E, \ \ \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 8

On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E^2 & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une famille de $n+1$ polynômes de E : $(L_i, \ 0 \leq i \leq n)$ telle que :
$$\forall (i,j) \in [1,n]^2, \ \ L_i(j) = \delta_{ij}.$$
3. Montrer que $(L_i, \ 0 \leq i \leq n)$ est une base orthonormée de E.
4. Donner les coordonnées dans cette base d'un polynÃ´me P de E.

Exercice 9

Soient x_1, x_2,...,x_p, p vecteurs d'un espace vectoriel euclidien de dimension n. On considère la matrice carrée G d'ordre p définie par :

$$G(x_1, x_2, ..., x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leq i,j \leq p}$$

1. Montrer que la famille $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est liée si et seulement si $\det G = 0$.
2. On suppose que la famille $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est libre, on note : $F = Vect(x_1, x_2, ..., x_p)$.
   a) Montrer que $\det G = [x_1, x_2, ..., x_p]_F^2 > 0$.
   b) Si $x \in E$, montrer que :
   $$d(x,F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, x_2, ..., x_p)}{\det(x_1, x_2, ..., x_p}.$$

PROF : M.TARQI

Exercice 10

Soit S l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$S(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. Vérifier que S est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Calculer le minimum pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de :

$$f(a,b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\mathrm{d}t.$$

(traduire le problème en terme de distance à un sous-espace).

•••••••••••