SÉRIE $n^\circ 17$

Groupe symétrique

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Soit $n \geq 5$, montrer que si (a,b,c) et (a',b',c') sont deux cycles d'ordre 3 dans $\mathscr{S}_n$, alors il existe une permutation σ paire telle que :

$$\sigma \circ (a,b,c) \circ \sigma^{-1} = (a',b',c').$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la signature de la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 3$. On note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{S}_n$ de signature égale à 1

1. Montrer que $\mathscr{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$.
2. Montrer que toute composée de deux transpositions de $\mathcal{S}_n$ peut être décomposée en un produit de 3-cycles.
3. En déduire que les 3-cycles de $\mathscr{S}_n$ engendrent $\mathscr{A}_n$.

Exercice 4

Décomposer la permutation suivante en produit de cycles :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Quel est l'ordre de cette permutation ? Calculer σ^{2006}.

Exercice 5

Montrer que tout groupe G fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$.

Exercice 6

Déterminer le centre du groupe $\mathscr{S}_n$, c'est-Ã -dire l'ensemble des permutations de $\mathscr{S}_n$ qui permutent avec toutes les autres.

Exercice 7

Soit $\mathscr{S}_4$ le groupe des permutations sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. On note $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (12)$ et $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (34)$.

1. On note $V_4 = \{Id, \lambda, \pi, \lambda \circ \pi\}$. Déterminer l'ordre de chaque élément de V_4.
2. Tracer la table de composition de V_4.
3. Montrer que V_4 est le plus petit sous-groupe de $\mathscr{S}_4$ contenant $\{\lambda, \pi\}$.
4. Le groupe V_4 est-il abélien ?
5. Rappeler la définition du centre $Z(G)$ d'un groupe G. Quel est le centre $Z(V_4)$ du groupe V_4 ?

Exercice 8

1. Décomposer la permutation χ de $(S_{10}, \circ)$ en produit de transpositions :

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 10 & 2 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la signature de χ.
3. Déterminer χ^{-1}.

Exercice 9

Pour $n \geq 1$, on note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{S}_n$ de signature égale à 1. $\mathscr{A}_n$ est appelé le groupe alterné d'indice n.

1. Démontrer que $\mathscr{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathscr{S}_n$.
2. Énumérer tous les éléments de $\mathscr{A}_3$, de $\mathscr{A}_4$.
3. On suppose désormais que $n \geq 2$ et on fixe τ une transposition de $\mathscr{S}_n$.

   Démontrer que

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathscr{S}_n & \longrightarrow & \mathscr{S}_n \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tau \end{array}$$

   est une bijection. En déduire le cardinal de $\mathscr{A}_n$.

••••••••••

PROF : M.TARQI