Série $n°13$

Courbes paramétrées

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Soit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y^2 = x^2(1-x)$.

1. La droite $y = tx$, $t \in \mathbb{R}$, coupe $\mathcal{C}$ en deux points que l'on déterminera. En déduire les équations paramétriques de $\mathcal{C}$. On notera $M(t)$ le point de coordonnées $x(t), y(t)$.
2. Construire $\mathcal{C}$ en précisant
   a) Les symétries.
   b) La nature de tout point de la courbe.
   c) Les points doubles.
   d) l'équation de la tangente à tout point de la courbe.
   e) Les points à tangente horizontale ou verticale.

Exercice 2

1. Déterminer les points doubles, lorsqu'ils existent, de la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = \frac{2t}{t^2-t-2}, \quad y(t) = \frac{t+1}{t^2+1}.$$

2. Même questions pour les courbes :

$$a)\ \begin{cases} x(t) = \dfrac{2t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t-t^3} \\ y(t) = \ln(1+t^2) \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x(t) = t^2+2t \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{cases}.$$

Exercice 3

Étudier les symétries, période et intervalle d'étude des courbes données paramétriquement par :

$$a)\ \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x(t) = 4t-1 \\ y(t) = 2t^3-3t^2+t+2 \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{2+t}{1-t^2} \end{cases}$$

Exercice 4

(Points singuliers) Déterminer les points singuliers (stationnaires) et l'allure de la courbe au voisinage des ces points :

$$a)\ \begin{cases} x(t) = t^4+4t \\ y(t) = t^4-2t^2 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x(t) = t^2-t \\ y(t) = t^3 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x(t) = e^{t-1}-t \\ y(t) = t^3-3t \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x(t) = t^2+\dfrac{2}{t} \\ y(t) = t^2+\dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Exercice 5

(Étude locale)Donner l'allure de courbe au voisinage du point de paramètre t_0 dans les cas suivants :

$$a)\ \begin{cases} x(t) = \dfrac{e^t}{t+1} \\ y(t) = \dfrac{t}{t+1} \\ t_0 = 0 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x(t) = t^2+\dfrac{2}{t} \\ y(t) = t^2+\dfrac{1}{t^2} \\ t_0 = 1 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x(t) = \dfrac{e^t}{\cos t} \\ y(t) = e^t \sin t \\ t_0 = 0 \end{cases}.$$

Exercice 6

Classifier les points des courbes suivantes (points ordinaires, d'inflexion, de rebroussement) :

$$a)\ \begin{cases} x(t) = t-t^2 \\ y(t) = t+t^2 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2t} \\ y(t) = t^2+\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x(t) = t^2e^t \\ y(t) = \dfrac{e^t}{1+t} \end{cases}.$$

Exercice 7

Étudier et construire les courbes paramétrées suivantes :

$$a)\ \begin{cases} x(t) = t^2-t \\ y(t) = t^2+t+1 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x(t) = -\dfrac{t^3}{t}+t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x(t) = 1-\cos t \\ y(t) = \tan t \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}.$$

Exercice 8

(Cercle passant par l'origine)Donner une équation en polaire d'un cercle passant par l'origine.

Prof : M.TARQI

Exercice 9

(Lemniscate de Bernoulli) On considère les deux points $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$.

1. Déterminer une équation polaire de l'ensemble C formé des points M tels que
$$MF.MF' = 1.$$
2. Étudier et tracer cette courbe.

Exercice 10

Étudier les courbes en polaires suivantes au voisinage du pôle :

1. $\rho(\theta) = \dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$.
2. $\rho(\theta) = \ln(\theta)$.
3. $\rho(\theta) = \ln\sin\theta$.

Exercice 11

Étudier et construire les courbes en polaires :
1) $\rho(\theta) = \sin^3\dfrac{\theta}{2}$ 2) $\rho(\theta) = a\tan\dfrac{\theta}{2}$, $a > 0$ 3) $\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ (*cardioïde*).

Exercice 12

Soit C la courbe paramétrée par
$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = 2t^2 \end{cases}$$

1. Tracer C.
2. Calculer l'aire de la boucle de C.

Exercice 13

Soit C la courbe paramétrée définie par les équations :
$$\begin{cases} x(t) = 2\sin t - \sin t\cos t - t \\ y(t) = (1-\cos t)^2 \end{cases}$$
pour $t \in [-\pi, \pi]$.

1. Tracer C.
2. Calculer la longueur de la courbe C.
3. Calculer le rayon de courbure en un point M de C.

Exercice 14

On appelle cycloïde la courbe décrite par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite D (pensez à un point marqué sur un pneu de vélo).

1. Déterminer une représentation paramétriques de la cycloïde.
2. Étudier et tracer cette courbe.
3. Calculer le rayon de courbure en un point régulier de la cycloïde.

Exercice 15

n désigne un entier naturel tel que $n \geq 2 \geq$. La distance de deux points A et B est notée AB. L'objet de cette exercice est l'étude de la courbe (C_n) ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité :
$$\prod_{k=0}^{n-1} MA_k = 1$$
où A_k est le point d'affixe $z_k = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$.

1. Montrer que $O \in (C_n)$. Montrer que (C_n) admet n axes de symétrie, que l'on précisera, en tenant compte de la parité de n.
   Montrer que (C_n) est sa propre image dans toute rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2k\pi}{n}$, où k est un entier relatif.
2. Dans cette question et la suivante, $n = 2$.
   a) Donner une équation cartésienne de (C_2). Vérifier que (C_2) est une courbe de degré 4.
   b) On passe en coordonnées polaires, en posant, pour tout point M autre que O, de coordonnées (x, y) :
   $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, avec $r > 0$ et $-\pi \leq \theta \leq \pi$.
   Écrire une équation de (C_2) en coordonnées polaires, que l'on mettra sous la forme :
   $$r^2 = f_2(\theta),$$
   f_2 étant à préciser.
   c) On supposant $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$, mettre cette équation sous la forme $r = g_2(\theta)$, et construire l'arc correspondant de (C_2). En déduire le tracé complet de la courbe.
   d) Calculer l'aire S_2 d'une des boucles de (C_2).
3. A tout point M du plan, autre que O, de coordonnées (x, y), on associe le point $M'(x', y')$ telle que :
   $$(R) \quad x' + iy' = \frac{1}{x+iy}.$$
   a) Calculer x' et y' en fonctions de x et de y ; vérifier que O, M, M' sont alignés ; calculer le produit des distances OM et OM'.
   b) La relation (R) définit une application, noté $\jmath$, du plan privé de O dans lui mÃªme .
   Former une équation de l'image (H) de $(C_2)\backslash\{O\}$ par $\jmath$.
   Reconnaître la nature de (H), que l'on dessinera.
4. Dans cette question et dans la suivante, $n \geq 2$ est quelconque.
   a) Quelle est la factorisation sur $\mathbb{C}$ du polynÃ´me $P_n(z) = z^n - 1$?
   b) En utilisant l'égalité, valable pour tout point M du plan, d'affixe z :
   $$MA_k = \mid z - z_k \mid,$$
   écrire une équation polaire de (C_n), que l'on mettra sous la forme :
   $$r^n = f_n(\theta),$$
   où f_n est une fonction très simple, que l'on précisera.

5. En supposant $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2n}$, mettre l'équation de (C_n) sous la forme :
$$r = g_n(\theta),$$
et construire l'arc correspondant de (C_n). En déduire l'allure d'ensemble (C_n). Dessiner (C_3) et (C_4).
6. On appelle S_n l'aire d'une boucle de (C_n). On se propose d'étudier :
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n \text{ et } \lim_{n \longrightarrow \infty} nS_n.$$
   a) Majorer S_n en faisant intervenir un triangle isocèle convenablement choisi. En déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} S_n$.
   b) Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale simple. En s'aidant d'un changement de variable bien choisi, déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} nS_n$.

•••••••••••