SÉRIE $n°08$

Structures algébriques

Année scolaire 05/06

Exercice 1

Sur $\mathbb{R}$ déjà muni de l'addition et de la multiplication, on définit la loi $\top$:

$$a \top b = ab + a + b$$

1. Montrer que $\top$ est associative et commutative, qu'elle possède un élément neutre. Quels sont les éléments symétrisables ?
2. La loi $\top$ est-elle distributive par rapport à la multiplication et l'addition ?

Exercice 2

(Axiomes fiables d'un groupe) Soit E un ensemble muni d'une loi associative notée multiplicativement

1. Montrer que s'il existe un élément e tel que $xe = x$ pour tout x de E, et si pour tout x de E, il existe $y \in E$ tel que $xy = e$ alors $(E, .)$ est un groupe.
2. Montrer que si E est fini et si tous les éléments de E sont réguliers alors E est un groupe (a est régulier si les deux applications $x \longrightarrow ax$ et $x \longrightarrow xa$ sont injectives)

Exercice 3

Démontrer qu'un groupe où pour tout x, $x^2 = e$, est commutatif.

Exercice 4

(Groupe produit) Soient G, H deux groupes multiplicatifs. On munit $G \times H$ de l'opération :

$$\forall\, g, g' \in G,\ \forall\, h, h' \in H,\quad (g, h) \cdot (g', h') = (gg', hh').$$

Montrer que $(\cdot)$ définit une loi de groupe sur $G \times H$.

Exercice 5

Soit G un groupe commutatif tel que $G = HK$, H et K deux sous-groupes de G tels que $H \cap K = \{e\}$. Montrer que les groupes G et $H \times K$ sont isomorphes.

Exercice 6

Soient G_1 et G_2 deux groupes cycliques. Monter que $G_1 \times G_2$ est cyclique si et seulement si $o(G_1) \wedge o(G_2) = 1$

Exercice 7

Soit P la droite projective réelle (c'est-Ã -dire $\mathbb{R}$ complétée par un point à l'infini de manière que $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ soit une bijection de P). On considère les applications f_1 et f_2 de P sur lui même définis par $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f_2(x) = 1 - x$.

1. Montrer que le groupe G (pour la composition des applications) engendré par f_1 et f_2 est cardinal 6.
2. Montrer que G est isomorphe au groupe des permutations $\mathcal{S}_3$.

Exercice 8

Soit G un ensemble non vide muni d'une opération interne $\cdot$ associative telle que :

$$\forall\, a, b \in G,\ \exists\, x, y \in G \text{ tel que } a = x \cdot b = b \cdot y.$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 9

(Minimisation des axiomes d'un groupe) Soit G un ensemble non vide muni d'une opération interne $(\cdot)$ associative qui possède un élément neutre à droite e (c'est-Ã -dire pour tout $x \in G$, $x.e = x$) et tel que tout élément x possède un inverse à droite x' (c'est-Ã -dire pour tout $x \in G$, il existe $x' \in G$ tel que $x.x' = e$). Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 10

(Transport de structure)

1. Soit G un groupe multiplicatif, E un ensemble, et ϕ une bijection de G dans E. On définit une opération $\star$ sur E par :

   $$\forall\, x, y \in E,\ x \star y = \phi\Big(\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)\Big).$$

   Montrer que $\star$ est une loi de groupe et que les groupes G et E sont isomorphes.
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 11

(Partie finie stable par produit) Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 12

(Centre d'un groupe et commutant d'un élément) Soit G un groupe multiplicatif. On note $Z(G) = \{a \in G \text{ tel que } \forall\, b \in G,\ ab = ba\}$ (**centre de** G), et pour $a \in G$: $C(a) = \{b \in G \text{ tel que } ab = ba\}$ (**commutant de** a). Montrer que $Z(G)$ et $C(a)$ sont des sous-groupes de G.

PROF : M.TARQI

Exercice 13

(Groupe des automorphismes) Soit G un groupe multiplicatif. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

1. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$.
2. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.
3. Pour $a \in G$ on note

$$\phi_a : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array}$$

Montrer que $\phi_a \in \mathrm{Aut}(G)$, et que l'application $a \mapsto \phi_a$ est un morphisme de groupes.

Exercice 14

Soit A un anneau. On considère la loi de composition sur A qui à tout couple (x, y) associé l'élément $xy - yx$, noté $[x, y]$
Montrer que cette loi est distributive par rapport à l'addition, et que, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de A :

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

Exercice 15

Montrer que l'ensemble E des nombres réels de la forme $a + b2^{\frac{1}{3}} + c4^{\frac{1}{3}}$ (a, b, c des nombres rationnels) est un anneau et montrer que cet anneau est un corps.

Exercice 16

Soit E un ensemble. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Quels sont ses éléments inversibles.

Exercice 17

(Élément nilpotent) Soit A un anneau. Un élément x de A est dit nilpotent s'il existe un entier naturel n non nul tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que si xy est nilpotent, il en est de même pour yx.
2. Montrer que si x et y sont deux éléments nilpotents de A et qui commutent, alors $x + y$ et xy sont nilpotents.
3. Montrer que si x est nilptotent, alors $1 - x$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 18

Montrer que tout anneau fini et intègre est un corps.

Exercice 19

Soit $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ et $G = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que F et G sont des corps.
2. L'application

$$f : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ a + b\sqrt{2} & \longmapsto & a + b\sqrt{3} \end{array}$$

est-t-elle un isomorphisme de corps ?

3. Les deux corps F et G sont-t-ils isomorphes ?

Exercice 20

(Caractéristique d'un anneau) Soient A un anneau, $E = \{n \in \mathbb{N} / n.1_A = 0_A\}$.
• Si $E = \emptyset$, on dit que A est de caractéristique 0.
• Si $E \neq \emptyset$, on appelle caractéristique de A le plus petit élément de E. Autrement dit, la caractéristique de A le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n.1_A = 0_1$, s'il existe, et vaut 0 sinon.

1. Quelle est la caractéristique des anneau $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathcal{P}(E), \triangle, \cap)$?
2. Soit A un anneau de caractéristique p premier. Montrer que $(a + b)^p = a^p + b^p$ et $(a - b)^p = a^p - b^p$

Exercice 21

Soit A un anneau intègre tel que, pour tout élément $x \in A$:

$$x^2 = x$$

Montrer que la caractéristique de A est 2.

Exercice 22

Soit A un anneau intègre de caractéristique p, où p est un nombre premier.

1. Montrer que l'application : $f : x \longmapsto x^p$ est un endomorphisme de l'anneau A.
2. Montrer que f est injective.

Exercice 23

Soit A un anneau intègre tel que, pour tout élément $x \in A$:

$$x^2 = x$$

1. Montrer que la caractéristique de A est 2.
2. Montrer que l'anneau A est isomorphe à $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

Exercice 24

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif tel que 2 est inversible dans A. Montrer que le système $(S) = \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = 1 \end{cases}$ admet une solution dans $A \times A$ est équivalent à -3 admet une racine carrée dans A. (penser à la résolution de l'equation $z^2 + z + 1 = 0$, dans $\mathbb{C}$)

Exercice 25

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

1. Montrer que $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, +, \cdot)$ n'est pas un corps.
2. Montrer que le diagonale de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{K}$.

Exercice 26

Soit A l'ensemble défini par :

$$A = \{z \in \mathbb{C} / \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ z = a + jb\}$$

avec $j = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

1. Montrer que A muni de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ est un anneau commutatif.
2. Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de A est $\mathbb{U} = \{z \in A / |z| = 1\}$.

•••••••••••