MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 25/26

Devoir surveillé $n^\circ 6$

13/03/2026

Durée 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice : 1 Soit n un entier supérieur à 1. $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

1. Justifier que, si $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \ \ |a_{i,j}| \leqslant 1.$$

2. Démontrer $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
Si $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \mathrm{Tr}(AS)$.

3*a*. Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale B telle que :

$$T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta).$$

3*b*. Démontrer que l'application T de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera t.

3*c*. Démontrer que, pour toute matrice orthogonale A de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$, puis déterminer le réel t.

Exercice : 2 On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du six, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsque l'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne, et l'expérience s'arrête.

1. Pour k entier naturel non nul, soit A_k l'événement : « on a obtenu le premier six au k-ième lancer du dé ».

1*a*. Calculer $p(A_k)$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) = 1$.

1*b*. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au troisième lancer ?

1*c*. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au k-ième lancer ?

1*d*. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six après le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $(2k)$-ième lancer ?

2. On appelle B l'événement : « on a obtenu la boule blanche ».

2*a*. Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné de six, quelle est la composition de l'urne juste avant qu'on ne lance le dé pour la k-ième fois ?

2*b*. En déduire $P(B \cap A_k)$, puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p(B \cap A_k)$.

2*c*. Calculer $P(B)$.

Problème : 1 Étant donné un nombre entier positif n, on procède à n jets successifs d'une pièce de monnaie, en notant à chaque jet le côté apparent : on obtient de cette façon un résultat d'épreuve w, formé d'une suite de n symboles F ou P. On désigne par Ω_n l'ensemble des épreuves possibles.
Par exemple, $w = (FPFF) \in \Omega_4$.

1. Étant donnée une partie A de Ω_n, on pose

$$p_n(A) = \frac{\text{Card}(A)}{2^n}.$$

Montrer que

1*a*. $p_n(A) = 1$.

1*b*. $p_n(AUB) = p_n(A) + p_n(B)$ si A et B sont des parties disjointes.

Expliquer alors pourquoi p_n est une probabilité sur Ω_n.

On désigne maintenant par A_n l'ensemble des épreuves w qui ne contiennent pas trois symboles F successifs, et on pose $u_n = p_n(A_n)$. On a donc $u_1 = u_2 = 1$, et on convient que $u_0 = 1$.

2. **2*a*.** Pour $n \geqslant 3$, montrer que A_n est partitionné par les ensembles,
$B_n = \{\, w \in A_n \mid w \text{ commence par } P \,\}$,
$C_n = \{\, w \in A_n \mid w \text{ commence par } FP \,\}$,
$D_n = \{\, w \in A_n \mid w \text{ commence par } FFP \,\}$.

2*b*. En déduire la relation de récurrence

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2} + \frac{1}{8}u_{n-3}$$

valable pour $n \geqslant 3$.

3. **3*a*.** Montrer que, pour z tel que $|z| < 1$, la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n z^n$ converge. On note $f(z)$ sa somme.

3*b*. Montrer, à l'aide du **2)b)**, que

$$f(z) = -\frac{2z^2 + 4z + 8}{z^3 + 2z^2 + 4z - 8}.$$

4. **4*a*.** Montrer que l'équation $x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$ ne possède qu'une racine réelle α, et que cette racine est comprise entre 1 et 1, 1.

4*b*. Décrire une méthode qui permettrait de calculer la valeur de α, on ne demande pas les calculs.

4*c*. Montrer que les autres racines de l'équation $x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$ ont un module $> \alpha$.

5. **5*a*.** Montrer que les polynômes

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}), \quad (z - \alpha)(z - \overline{z_0}), \quad (z - \alpha)(z - z_0)$$

où $\alpha, z_0, \overline{z_0}$ sont les racines de l'équation étudiée en **4)**, constituent une base de l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré $\leqslant 2$. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(z) = \frac{A}{z-\alpha} + \frac{B}{z - z_0} + \frac{\overline{B}}{z - \overline{z_0}}.$$

5*b*. Quel est le rayon de convergence de la série entière du **3)a)**.

5*c*. Donner un équivalent de un lorsque n tend vers l'infini.

6. Montrer que si l'on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

pour $n \geqslant 2$, la relation de récurrence **2)b)** prend la forme

$$X_{n+1} = MX_n.$$

où M est une matrice à préciser.

7. À quelle équation doit satisfaire une valeur propre de M ?

Problème : 2 Ω désigne un ensemble muni d'une probabilité p.

Question préliminaire : On considère une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'événements telle que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} p(A_n)$ converge. Montrer que l'événement

$$B = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$$

est de probabilité nulle.

Dans tout le problème, on considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et de même loi uniforme, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$p(X_n = -1) = p(X_n = +1) = \frac{1}{2}.$$

On lui associe la suite

$$\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

1. **1*a*.** Calculer l'espérance $\phi(t) = E(e^{tX_n})$ de la variable aléatoire e^{tX_n}, pour t réel donné.

   1*b*. Montrer que $\phi(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$ pour tout t réel, on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2} - \ln(t)$.

2. **2*a*.** Exprimer $E(e^{tS_n})$ en fonction de $\phi(t)$ pour tout t réel.

   2*b*. Calculer
   $$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{\frac{tS_n}{\sqrt{n}}}\right)$$
   pour tout t réel.

3. Soit a un nombre positif.

   3*a*. Établir l'inégalité
   $$p(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ta}E(e^{tS_n})$$
   valable pour tout t réel.

   3*b*. En déduire que
   $$p(S_n \geqslant a) \leqslant e^{\frac{-a^2}{2n}},$$
   on optimisera la majoration obtenue, à l'aide **a)** et **1)b)** et par un choix convenable du paramètre t.

   3*c*. Majorer $p(|S_n| \geqslant a)$; on montrera d'abord que $p(S_n \leqslant -a) = p(S_n \geqslant a)$.

4. **4*a*.** Soit $\varepsilon > 0$ donné, en prenant $a = n\varepsilon$ dans **3)c)**, montrer que la série
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$$
   est convergente.

   4*b*. On se donne $\varepsilon > 0$. Montrer qu'on peut trouver une partie Ω_ε de Ω, de probabilité nulle et vérifiant la propriété suivante : pour tout $w \notin \Omega_\varepsilon$, il existe un nombre entier n_ε positif tel que
   $$\frac{|S_n(w)|}{n} < \varepsilon$$
   pour $n \geqslant n\varepsilon$.

   4*c*. Que peut-on dire de la partie $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} U_{\frac{1}{k}}$ de Ω ? Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, tend vers 0 presque sûrement.

5. Montrer que, pour $\alpha > 1$ fixé, parmi les événements
   $$\left\{ \ \Big| S_n| > \alpha\sqrt{2n\ln n} \right\},$$
   presque sûrement, seul un nombre fini d'entre eux peuvent se produire.

Fin de l'épreuve