



MP – CPGE MOHAMMED VI-KÉNITRA
Année scolaire 25/26

DEVOIR SURVEILLÉ n° 5

07/02/2026
Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1 : On considère les applications f, g et h de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbf{R} , définies par $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$, $g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\sin t) dt$ et $h(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\cos t) dt$.

1. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

1a. Démontrer que $g(x) = h(x)$.

1b. Démontrer que $f(x) = \frac{1}{2} \int_x^{\pi-x} \ln(\sin t) dt$.

1c. Déterminer la relation liant $f(2x)$ à $g(x)$.

2. 2a. Montrer que l'on a, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

2b. Démontrer l'existence de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) dt$.

2c. Dédurre de la question précédente que $f(x)$ admet une limite I lorsque x tend vers 0 à droite.

2d. Montrer que $g(x)$ admet aussi pour limite I lorsque x tend vers 0 à droite.

3. Dédurre des résultats de 1 et 2 la valeur de I .

**Exercice 2 :**

1. **Question préliminaire :** En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbf{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} a_n x^n$ où :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{\cos(n)}{n}.$$

On note R son rayon de convergence.

2. Montrer que $R \geq 1$.
 3. Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.
 4. En déduire la valeur de R .

On note alors, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$.

5. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par :

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} e^{in} x^n$$

où i désigne le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.

6. En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 3 : Soit n un entier naturel, un polynôme de Chebychev est le polynôme note T_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

1. Existence et unicité :

1a. Montrer l'existence et l'unicité des polynômes de Chebychev dans $\mathbf{R}[X]$.

1b. Écrire $T_{n+1}(x)$ en fonction de $T_n(x)$, $T_{n-1}(x)$ et de x .

1c. Donner T_0 , T_1 , T_2 et T_3 .

2. Donner le degré de T_n , le coefficient dominant et les racines de T_n .

3. On définit l'application φ sur $\mathbf{R}[X]^2$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2, \varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

3a. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

3b. Donner suivant les valeurs de m, n le produit scalaire $\varphi(T_n, T_m)$.

3c. En déduire que la famille des polynômes de Chebychev de degré inférieur ou égale à n forme une base de $\mathbf{R}_n[X]$.



Problème : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $a_0 = 0$, que la série de terme général a_n , converge et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

On lui associe la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $b_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} b_1 = a_1 & \text{si } n = 1 \\ b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k a_{n-k} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Première partie

- Démontrer que pour tout entier n supérieur à 1, on a $0 \leq b_n \leq 1$.
- On considère la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ de somme A et la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ de somme B .

2a. Montrer que les rayons de convergence R_1 et R_2 des deux séries entières $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ et

$\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ sont supérieurs à 1.

2b. Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, on a :

$$B(z) = \frac{A(z)}{1 - A(z)}.$$

2c. Montrer que $R_2 = 1$.

2d. Application : Soit $\lambda \in]0, 1[$. Comment doit-on choisir les coefficients a_n , $n \in \mathbb{N}^*$ pour que l'on ait $b_n = \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on se restreint au cas où A est un polynôme de degré p . Soient z_1, z_2, \dots, z_p les p racines complexes, distinctes ou confondues, de l'équation algébrique (E) :

$$(E) \quad A(z) = 1.$$

Le réel 1 est racine de cette équation, c'est par convention la racine z_1 .

- 1a.** Montrer que les racines de l'équation (E) ont toutes un module supérieur ou égal à 1.
 - 1b.** Montrer que si $a_1 \neq 0$, l'équation (E) n'a pas de racine de module égal à 1 autre que z_1 (on pourra raisonner par l'absurde en supposant que l'équation (E) possède la racine z_0 de module 1, et en observant qu'elle possède alors la racine \bar{z}_0).
- On suppose de plus que ces racines sont simples et pour chaque entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on pose $\alpha_k = A'(z_k)$. En utilisant l'expression de $B(z)$ obtenue plus haut, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\alpha_k z_k^{n+1}}.$$



3. En déduire que si $a_1 \neq 0$ et si les racines de l'équation (E) sont simples, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers une limite L . Calculer L en fonction de α_1 .

Troisième partie

On revient au cas général où A est une série entière et l'on désigne par r_n le reste d'indice n de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

- Soit R la série entière de terme général $r_n z^n$.
 - Démontrer que le rayon de convergence de la série R est supérieur à 1.
 - Pour chaque nombre complexe z tel que $|z| < 1$, on désigne par $R(z)$ la somme de la série R . Exprimer $R(z)$ en fonction de $A(z)$ et z seulement.
- Pour chaque nombre complexe z tel que $|z| < 1$, trouver une relation entre $R(z)$, $B(z)$ et z . En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$r_0 b_n + r_1 b_{n-1} + \dots + r_{n-1} b_1 + r_n = 1.$$

- On suppose les coefficients a_n , choisis de telle sorte que b_n , tende vers une limite finie L différente de 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Démontrer que la série de terme général r_n converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \frac{1}{L}.$$

On pourra procéder de la façon suivante. Soit p un entier inférieur à n , on pose

$$X_{n,p} = r_0 b_n + r_1 b_{n-1} + \dots + r_p b_{n-p}$$

$$Y_{n,p} = r_{p+1} b_{n-(p+1)} + \dots + r_{n-1} b_1 + r_n$$

- Étudier $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} X_{n,p})$. En déduire que la série de terme général r_n converge.

- Étudier $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} Y_{n,p})$. En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \frac{1}{L}$.

FIN DE L'ÉPREUVE