MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra
Année scolaire 25/26

Devoir surveillé $n^\circ 4$

06/01/2026
Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Problème : 1 Dans ce problème, le corps de base est celui des nombres réels. n désigne partout un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose, pour $x \geqslant 0$,

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n}.$$

1. Montrer que la fonction F_n est croissante majorée, en déduire que F_n admet une limite en $+\infty$. Dans le suite de ce problème on pose :

$$I_n = \lim_{x\to+\infty} F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n}.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, former une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1}.

3. Calculer I_1 et vérifier que le résultat s'exprime simplement à l'aide de π et de $\sqrt{3}$ (*décomposer en éléments simples la fraction* $\dfrac{1}{x^3+1}$).
En déduire, lorsque $n \geqslant 2$, une expression de I_n sous forme d'un produit.

4. On note ε un réel de $]0,2[$ et on considère l'égalité :

$$I_n = J_n(\varepsilon) + K_n(\varepsilon) + L_n$$

où l'on a posé :

$$J_n(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n}, \quad K_n(\varepsilon) = \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n} \quad \text{et} \quad L_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n}.$$

4*a*. À l'aide d'une majoration simple de I_n, que l'on établira, déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$.

4*b*. Montrer que :

$$0 \leqslant J_n(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leqslant K_n(\varepsilon) \leqslant \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{\left(1+\frac{\varepsilon^3}{8}\right)^n}.$$

4*c*. À l'aide de ce qui précède, déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n}$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

5. Soit x un réel de $]-\infty, 1[$. On pose : $u(x) = x + \ln(1-x)$, où ln désigne le logarithme népérien.

5*a*. Étudier les variations de u sur $]-\infty, 1[$. En déduire l'inégalité valable si $x < 1$:

$$\ln(1-x) \leqslant -x.$$

5*b*. En reprenant l'expression de I_n sous forme de produit obtenue en **3.**, quelle majoration de $\ln(I_n)$ peut-on en déduire ?

5*c*. On pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$:

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

On pourra pour cela s'aider du dessin de la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} H_n$.

5*d*. À l'aide de ce qui précède, retrouver $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

6. On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$:

$$a_n = \sqrt[3]{n} I_n, \quad b_n = \ln(a_n), \quad t_n = b_{n+1} - b_n.$$

6*a*. Déterminer le développement limité de t_n, à l'ordre 2 inclus, selon les puissances de $\dfrac{1}{n}$ lorsque n tend vers l'infini.

6*b*. Montrer l'existence d'un élément n_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout n vérifiant $n \geqslant n_0$, on ait l'inégalité stricte :

$$\frac{-1}{3n^2} < t_n < 0.$$

Que peut-on en déduire au sujet du sens de variation de la suite $(b_n)_{n\geqslant n_0}$?

6*c*. Montrer à l'aide de **6. 6b.** que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée. On commencera par vérifier que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

6*d*. Que peut-on en déduire pour la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

6*e*. Montrer l'existence d'un réel l, strictement positif, que l'on ne tentera pas de calculer, tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

En déduire l'existence d'un élément de $\mathbb{N}^*$, noté n_1, tel que, pour tout entier n vérifiant $n \geqslant n_1$, on ait l'inégalité :

$$a_n > \frac{l}{2}.$$

En déduire une minoration de I_n pour $n \geqslant n_1$.

7. **7*a*.** Montrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} x^{\frac{-1}{3}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leqslant \int_{n-1}^{n} x^{\frac{-1}{3}}\,\mathrm{d}x.$$

7*b*. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ est divergente.

7*c*. À l'aide des questions **6. 6e.** et **7. 7b.**, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ est divergente.

Problème : 2 On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, +\infty[$:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle.

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle.

3. Montre que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+^*$. On notera maintenant

$$x \mapsto F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad x \in]0, +\infty[$$

sa fonction somme.

4. Montrer que $F(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

5. Montrer qu'il n'existe de réels $0 < a < b$ tels que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ soit normalement convergente sur le segment $[a, b]$.

6. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

8. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Montrer que $F'(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

10. Soit $x > 0$. Donner une expression simple pour $F(x+1) + F(x)$.

11. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$0 < F(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

12. Montrer que l'intégrale

$$G(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1} \mathrm{d}t$$

est bien convergente pour $x > 0$.

13. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$G(x) + G(x+1) = \frac{1}{x}.$$

14. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$0 < G(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

15. On pose $H(x) = F(x) - G(x)$. Montrer que H est 2-périodique et $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

16. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1} \mathrm{d}t.$$

17. Montrer que

$$F(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

18. Montrer que pour tout $x > 1$:

$$F(x) + F(x+1) \leqslant 2F(x) \leqslant F(x) + F(x-1).$$

19. En déduire que

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

20. Esquisser le graphe de F sur $]0, +\infty[$.

Fin de l'épreuve