



MP – CPGE MOHAMMED VI-KÉNITRA  
Année scolaire 25/26

## DEVOIR SURVEILLÉ n°3

27/11/2025  
Durée 2 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

### Exercice : 1

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose  $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ , soit  $\Omega$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de terme général  $a_{r,s} = w^{(r-1)(s-1)}$ , soit

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & \dots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

On note  $\Omega'$  la matrice conjuguée de  $\Omega$  ( dont les éléments sont conjugués de ceux de  $\Omega$  ).

1. Montrer que  $\Omega\Omega' = nI_n$ , puis en déduire que  $\Omega$  est inversible et calculer son inverse.

On rappelle que  $\mathbb{C}^n$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  et que sa base canonique est  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Soit l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  défini sur la base canonique par  $g(e_1) = e_n$  et pour tout  $i$  compris entre 2 et  $n$  :  $g(e_i) = e_{i-1}$ .

2. Déterminer la matrice de  $g$  dans la base canonique, on la notera  $J$ .

3. (a) Déterminer  $g^k$  et  $J^k$  pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Que peut-on dire de  $g^n$  ?

(b) Déterminer les valeurs propres éventuelles de  $g$ .

4. (a) Démontrer que  $w$  est une valeur propre pour  $g$  et déterminer le sous-espace propre correspondant.

(b) Plus généralement pour tout  $k$  compris entre 0 et  $n-1$ , démontrer que  $w^k$  est une valeur propre et déterminer le sous-espace propre associé.

(c) Montrer que  $J$  est diagonalisable et déterminer les matrices  $P$  inversible et  $D$  diagonale telles que  $J = PDP^{-1}$ .

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des nombres complexes et

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$



5. (a) Montrer que  $M$  est une combinaison linéaire de  $I_n, J, \dots, J^{n-1}$ .
- (b) En déduire que  $M$  est diagonalisable et en déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres.
- (c) Cas particulier : si  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ , quel est le rang de  $M$  et déterminer sans calcul ses éléments propres. Retrouver ce résultat en utilisant ce qui précède.

### Exercice : 2

Vous devez répondre à cet exercice directement sur la feuille. Chaque bonne réponse donnera 1 point, chaque mauvaise en fera perdre 1. Merci d'écrire votre nom sur cette feuille également. Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). On notera  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $u$ ,  $E_{\lambda_1}(u), E_{\lambda_2}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$  les espaces propres associés et  $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ .

N°	Questions	Vrai	Faux
1	$u$ diagonalisable $\Leftrightarrow E = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u)$		
2	$u$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres.		
3	$u$ diagonalisable $\Leftrightarrow p = n$		
4	$u$ diagonalisable $\Leftrightarrow \chi_u$ est scindé à racines simples		
5	$u$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.		
6	$\chi_u$ non scindé $\Leftrightarrow u$ non diagonalisable.		
7	Un polynôme annulateur de $u$ a toujours les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ pour racines mais peut en avoir d'autres.		
8	$u$ nilpotent $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ .		
9	Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.		
10	Seules les homothéties ont un polynôme annulateur de degré 1.		
11	Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , il suffit de vérifier que $\dim(E_{\lambda_i}) = \text{mult}(\lambda_i)$ pour tout $i$ de $\{1, 2, \dots, p\}$ pour montrer que $u$ est diagonalisable.		
12	$u$ nilpotente non nulle $\Rightarrow u$ non diagonalisable.		
13	$u$ inversible $\Leftrightarrow u$ diagonalisable.		
14	$u$ diagonalisable $\Rightarrow u$ inversible.		
15	$u$ diagonalisable et a une unique valeur propre $\Rightarrow u$ est une homothétie.		
16	On a $\dim(E_{\lambda_1}(u)) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}(u)) \leq \dim(E)$ avec égalité si, et seulement si, $u$ diagonalisable.		
17	Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $u$ est trigonalisable.		
18	Si $u$ a une unique valeur propre alors $u - \lambda \text{Id}_E$ est nilpotente.		
19	Si $\lambda$ est valeur propre de $u$ alors $\lambda^3$ est valeur propre de $u^3$ .		
20	Les endomorphismes de rang 1 sont diagonalisables.		
21	$u$ est diagonalisable $\Rightarrow u^k$ est diagonalisable ( $k \in \mathbb{N}$ )		
22	$u^2 = \text{Id}_E$ et $u$ diagonalisable $\Rightarrow u = \pm \text{Id}_E$ .		
23	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.		
24	Deux matrices équivalentes par lignes ( c'est-à-dire qu'on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes ) ont même polynôme caractéristique.		
25	$u^2$ diagonalisable $\Rightarrow u$ diagonalisable.		
26	La somme de deux endomorphismes diagonalisables est diagonalisable.		

FIN DE L'ÉPREUVE