MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 25/26

Devoir surveillé $n^\circ 1$

26/09/2025

Durée 3 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1

On considère les applications suivantes, de $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ dans lui-même.

$$id : x \longmapsto x,\quad f_1 : x \longmapsto 1-x,\quad f_2 : x \longmapsto \frac{1}{x},$$
$$f_3 : x \longmapsto \frac{x}{x-1},\quad f_4 : x \longmapsto \frac{1}{1-x},\quad f_5 : x \longmapsto \frac{x-1}{x}$$

On munit l'ensemble $E = \{id, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ de la loi $(\circ)$ de composition des applications.

1. **1*a*.** Écrire la table de composition de $(E, \circ)$.

1*b*. Montrer que $G = (E, \circ)$ est un groupe.

1*c*. Est-ce que G est un groupe abélien ?

2. Montrer qu'il existe un isomorphisme de E dans le groupe symétrique $\mathscr{S}_3$ de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 2

Montrer que tout anneau fini et intègre est un corps.

Exercice 3

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'ensemble de réels suivant :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{ m + n\sqrt{2} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, .)$ (ensemble muni de l'addition et de la multiplication des réels), est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, .)$.
On considère l'application φ, de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même, qui à $m + n\sqrt{2}$ associe :

$$\varphi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}.$$

2. Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, .)$ (c'est-à-dire une bijection, et un morphisme pour chacune des deux lois).

3. Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\varphi(x)$. Montrer que N est une application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication.

4. Démontrer que x est un élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

5. Vérifier que $3 + 2\sqrt{2}$ et $-3 + 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Problème

Dans tout le problème, on considère les deux matrices réelles $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}$ où b est un réel non nul.

1. **1*a*.** Démontrer que l'ensemble C des matrices réelles d'ordre 2 qui commutent avec F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
(On rappelle que $C = \{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid MF = FM \}$.)

1*b*. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque réelle d'ordre 2, déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur x, y, z, et t pour que M appartienne à C.

1*c*. Lorsque M est élément de C, montrer qu'il existe deux réels u et v tels que

$$M = uI + vF.$$

1*d*. En déduire que (I, F) est une base de C.

2. **2*a*.** Prouver l'existence de deux réels α_2 et β_2 tels que $F^2 = \alpha_2 F + \beta_2 I$. Pour cela, on calculera α_2 et β_2 en fonction de a, b et c.

2*b*. Plus généralement, pour tout entier naturel n, prouver l'existence de deux réels α_n et β_n tels que :

$$F^n = \alpha_n F + \beta_n I.$$

2*c*. Déterminer une relation de récurrence entre α_{n+2}, α_{n+1} et α_n.

2*d*. Déterminer α_n lorsque : $a = 3$, $b = -2$ et $c = -2$.

2*e*. Déterminer α_n lorsque : $a = 3$, $b = 1$ et $c = 1$.

3. **3*a*.** Prouver que C est stable par le produit matriciel.

3*b*. Caractériser les matrices inversibles éléments de C.

3*c*. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a, b et c les éléments non nuls de C sont tous des matrices inversibles.

3*d*. Dans le cas où $a = 3$, $b = -2$ et $c = -2$, y a t-il dans C des matrices non inversibles ? Si oui, lesquelles ?

4. On considère l'endomorphisme Φ de C défini par $\Phi(M) = FM$.

4*a*. Justifier que Φ est un automorphisme de l'espace vectoriel C si et seulement si F est inversible.

4*b*. Déterminer la matrice G de Φ relativement à la base (I, F) de C.

Fin de l'épreuve