MP – CPGE Mohamed VI-Kénitra
Année scolaire 21/22

Devoir surveillé $n^\circ 2$

23/11/2021
Durée 4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Partie. I : Préliminaires

1. Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ un polynôme scindé de degré n, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ses racines distincts ou non.
Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$.

2. ***2a.*** Soit l'équation : $(E)\ \ z^5 - 1 = 0$.
Vérifier que les racines de (E) sont : $1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}$.

2b. Déterminer le polynôme Q tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait :

$$z^5 - 1 = (z-1)Q(z).$$

2c. i) Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en effectuant le changement d'inconnue défini par :

$$z + \frac{1}{z} = u$$

ii) De la question précédente, déduire les valeurs de :

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}, \cos\frac{\pi}{5}, \sin\frac{2\pi}{5}, \sin\frac{4\pi}{5}, \sin\frac{\pi}{5}$$

en fonction de $\sqrt{5}$.

3. Considérons le déterminant de Vandermonde :

$$D(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \ldots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

où les $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont de nombres complexes.

3*a*. En considérant le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i) = X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} c_j X^j$ de degré $n-1$ qui a pour racines $a_1, \dots, a_{n-1}$, montrer que

$$D(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & 0 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} & 0 \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & P(a_n) \end{vmatrix}$$

3*b*. En déduire que $D(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Partie II : Sommes de Gauss

Pour tout entier naturel $n \neq 0$, on pose $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k^2}{n}}$. On pose également $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On désigne par $\overline{z} = x - iy$ le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$.

1. Calculer G_1, G_2, G_3, G_4, G_5. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^{kr}$ où r est un élément fixé de $\mathbb{Z}$.

2. Soit $A = (a_{rs})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$ et $B = (b_{rs})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$ deux matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On appelle trace de A, et on note $\mathrm{Tr}(A)$, la somme des coefficients de la diagonale principale :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{r=1}^{n} a_{rr}.$$

Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Montrer que, si A est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors on a :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{r=1}^{n} \lambda_i.$$

3. On considère la matrice A_n définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta_n & \zeta_n^2 & \dots & \zeta_n^{n-1} \\ 1 & \zeta_n^2 & \zeta_n^4 & \dots & \zeta_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta_n^{n-1} & \zeta_n^{2(n-1)} & \dots & \zeta_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = (a_{r,s})_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$$

avec $a_{rs} = \zeta_n^{(r-1)(s-1)}$.

Montrer que $\mathrm{Tr}(A_n) = G_n$. Montrer que A_n^2 s'exprime simplement en fonction de B_n :

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = (b_{r,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n}$$

avec $b_{rs} = 1$ si $r+s=2$ ou $r+s=n+2$, $b_{rs}=0$.
Calculer B_n^2.

4. Montrer que, si λ est valeur propre de la matrice carrée A, λ^2 est valeur propre de la matrice A^2. En déduire que la matrice A_n, a, au plus, 4 valeurs propres.

5. Montrer que la matrice B_n définie au **3.** est diagonalisable. Lorsque n est impair (on posera $n = 2p+1$) expliciter une base dans laquelle B_n est diagonale.

6. Soir r un entier relatif, soit G_n^r l'expression :

$$G_n^r = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^{(r+k)^2}.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall r \in \mathbb{Z}, G_n^r = G_n$. (considérer $G_n^{r+1} - G_n^r$).
En déduire que :

$$|G_n|^2 = G_n\overline{G}_n = \sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{(r+s)^2-r^2}\right)$$

et en déduire que $|G_n| = \sqrt{n}$ lorsque $n = 2p+1$ est impair.

7. ***7a.*** On pose $c_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant r<s\leqslant n}(r+s)$. Calculer c_n en remarquant que :

$$\sum_{1\leqslant r,s\leqslant n}(r+s) = 2c_n + 2\sum_{r=1}^{n} r.$$

7b. En utilisant ce qui précède, ainsi que l'égalité : $e^{i\alpha} - 1 = 2ie^{\frac{i\alpha}{2}}\sin\dfrac{\alpha}{2}$, montrer qu'un argument de $\det(A_n)$ est $(3n-2)(n-1)\dfrac{\pi}{4}$.

8. Montrer que la matrice A_n, définie au **3.**, est semblable à une matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Montrer que les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne prennent que 4 valeurs $\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}$. On désigne par a, b, c, d le nombre de fois que ces valeurs respectives sont prises.

Montrer que, si n est impair, $n = 2p + 1$, on a :

$$a + b = p + 1, c + d = p, (a - b)^2 + (c - d)^2 = 1.$$

Montrer alors que $(b + d)$ a la même parité que p. Calculer a, b, c, d et en déduire la valeur de G_n lorsque n est impair.

Fin de l'épreuve