



MP – CPGE MOHAMMED VI-KÉNITRA
Année scolaire 25/26

DEVOIR LIBRE n° 10

à rendre le 13/03/2026

On considère l'ensemble E des matrices $M(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \gamma(x) \\ \beta(x) & \delta(x) \end{pmatrix}$ satisfaisant à la relation :

$$M(x)M(y) = M(x+y) \quad (1)$$

$\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$ représentent des fonctions réelles, de la variable réelle x , continues et dérivables.

1. Les matrices $M(x)$ et $M(y)$ commutant, que peut-on dire de leurs vecteurs propres ?
2. En utilisant uniquement la propriété de commutation, montrer que les matrices $M(x)$ sont de la forme :

$$M(x) = \begin{pmatrix} A(x) - pB(x) & qB(x) \\ rB(x) & A(x) + pB(x) \end{pmatrix}$$

où p, q, r sont trois constantes et $A(x), B(x)$ deux fonctions de la variable x .

3. **3a.** En utilisant ensuite la condition (1), calculer $A(x+y)$ et $B(x+y)$ en fonction de $A(x), A(y), B(x)$ et $B(y)$.

On pose $\omega^2 = p^2 + qr$, ω pouvant être réel ou complexe.

3b. On suppose $\omega \neq 0$.

On pose $C(x) = A(x) + \omega B(x)$ et $D(x) = A(x) - \omega B(x)$.

Montrer que : $C(x+y) = C(x)C(y)$ et $D(x+y) = D(x)D(y)$.

En déduire $A(x)$ et $B(x)$.

3c. On suppose $\omega = 0$. Déterminer à nouveau $A(x)$ et $B(x)$.

4. Montrer que cette étude permet de retrouver les matrices de rotation plane.
5. Les matrices $M(x)$ étant supposées diagonalisables, peut-on, en utilisant cette propriété, retrouver directement les résultats du paragraphe 3. 3.a ?
6. On appelle dérivée de la matrice $M(x)$ et l'on note $M'(x)$ ou $\frac{dM(x)}{dx}$ la matrice :

$$M'(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{d\alpha(x)}{dx} & \frac{d\gamma(x)}{dx} \\ \frac{d\beta(x)}{dx} & \frac{d\delta(x)}{dx} \end{pmatrix}$$

Montrer que la dérivée d'une somme (resp. du produit) de deux matrices $M(x)$ de l'ensemble E satisfait aux règles habituelles de calcul de la dérivée d'une somme (resp. du produit) de deux fonctions.

En supposant la matrice $M(x)$ régulière, à valeurs propres distinctes, peut-on établir une relation matricielle entre $M(x)$ et $\frac{dM(x)}{dx}$ et retrouver ainsi les résultats du paragraphe 3.3.a ?

Fin de l'épreuve