MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 25/26

Devoir libre $n^\circ 9$

à rendre le 13/02/2026

Problème : On se place dans un espace vectoriel réel E de dimension 3 muni de son produit scalaire canonique noté $(x|y)$. On rappelle que :

$$(\forall x \in E),\ \ \|x\|^2 = (x|x).$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ le sous-espace vectoriel orthogonal à F. Soit $u \in E$ $(u \neq 0)$: le sous-espace vectoriel de E engendré par u sera noté $\mathbf{R}u$. Si φ est un automorphisme orthogonal de E, c'est à dire un endomorphisme bijectif de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \ (\varphi(x)|\varphi(y)) = (x|y),$$

on pose :

$$P_\varphi = \{\, x \in E \mid \varphi(x) = x \,\}$$
$$R_\varphi = \{\, x \in E \mid (\forall y \in E), x = \varphi(y) - y \,\}\,.$$

N.B : les parties I et II de ce problème sont totalement indépendantes.

Partie I :

Si u est un vecteur non nul fixé de E, on note s_u, l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in E,\ \ s_u(x) = x - 2\left(\frac{(x|u)}{\|u\|^2}\right) u.$$

1. **1*a*.** Vérifier que s_u, est un endomorphisme de E et que $s_u(u) = -u$.

   1*b*. Montrer que $s_u \circ s_u = \mathrm{id}_E$.

   1*c*. En déduire que s_u est un automorphisme orthogonal de E.

2. Soit h un endomorphisme de E vérifiant :

$$(\forall u \in E)\ \ (u \neq 0) \Rightarrow (h \circ s_u = s_u \circ h).$$

   Montrer que h est une homothétie de E.

3. Soient v et w deux vecteurs distincts dans E tels que $\|v\| = \|w\|$. Établir que : $s_{v-w}(v) = w$.

4. **4*a*.** Justifier que P_{s_u} est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

4*b*. Soit (e_1, e_2) une base de P_{s_u}. Montrer que (e_1, e_2, u) est une base de E et donner la matrice de s_u dans cette base.

5. Montrer que $R_{s_u} = \mathbf{R}u$.

Partie II

Soit φ un automorphisme orthogonal de E. Dans cette partie, on note φ^{-1} l'automorphisme réciproque de φ.
φ^k l'application de E dans lui même définie par $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}$ si k est un entier tel que $k \geq 1$ et on pose $\varphi^0 = \mathrm{id}_E$.

6. Vérifier que P_φ et R_φ sont des sous-espaces vectoriels de E.

7. **7*a*.** Établir que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \ (x | \varphi(y) - y) = \left(\varphi^{-1}(x) - x | y\right).$$

7*b*. En déduire que $P_\varphi = (R_\varphi)^\perp$.

8. Soit n un entier naturel non nul. On définit l'application Φ_n de E dans lui-même par :

$$\Phi_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^k = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + \varphi + \ldots + \varphi^{n-1}\right).$$

8*a*. Vérifier que Φ_n est un endomorphisme de E.

8*b*. i) Soit $x \in R_\varphi$. Montrer qu'il existe $y \in E$, tel que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \ \ \varphi^k(x) = \varphi^{k+1}(y) - \varphi^k(y).$$

ii) En déduire que pour tout $x \in R_\varphi$, il existe $y \in E$ tel que

$$\|\Phi_n(x)\| \leq \frac{2\|y\|}{n}.$$

8*c*. Soit w un vecteur de E.

i) Montrer qu'il existe un unique couple $(x, p(w)) \in R_\varphi \times P_\varphi$ tel que $w = x + p(w)$.

ii) En déduire finalement que la suite $(\Phi_n(w))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge dans E vers $p(w)$

Fin de l'épreuve