



MP – CPGE MOHAMMED VI-KÉNITRA
Année scolaire 25/26

DEVOIR LIBRE n°8

à rendre le 03/02/2026

Exercice 1 : Pour tout entier d , on cherche à déterminer le nombre de couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a + 2b = d$, on note $p(d)$ ce nombre.

1. Calculer $p(2)$, $p(3)$ et $p(6)$.

2. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$.

3. Développer en série entière la fraction $F(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}$.

4. Déterminer une formule pour $p(d)$.

Exercice 2 : On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-x \sin^2(t)}}$.

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale définissant $f(x)$ existe. Examiner en particulier l'existence de $f(1)$.

2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur D . et expliciter ses dérivées f' et f'' .

3. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Exprimer a_n , en fonction de l'intégrale $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt$.

4. On considère l'équation différentielle

$$(E) (x^2 - x)y'' + (2x - 1)y' + \frac{1}{4}y = 0.$$

a) Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de zéro.

Préciser le rayon de convergence des séries entières obtenues.

b) Calculer $\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\sin(t) \cos(t)}{4(1 - x \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} \right]$. puis établir que f est solution de (E) sur $] -\infty, 1[$. En

déduire que pour tout entier naturel n , on a : $w_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.

5. Montrer que la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(1 - x)$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

Vérifier que la famille (f, g) est libre, puis en déduire toutes les solutions de (E) sur $]0, 1[$.

Exercice 3 : Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{e^t - 1} dt$ converge. En utilisant un développement en série de fonctions de la fonctions sous-signe intégral, écrire I comme somme d'une série numérique.

2. En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ est convergente et calculer sa somme. (considérer $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{3}{4}$).

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ existe.

1. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Étudier alors la limite de $F(x)$ quand x tend vers 0^+ .

2. Si $F(x)$ admet une limite l quand x tend vers 0^+ , que peut-on dire $\int_0^{+\infty} f(t) dt$? Qu'en est-il si on suppose de plus que $\lim_{t \rightarrow +\infty} tf(t) = 0$.

3. On suppose que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ existe. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T tf(t) dt = 0$.

(Appliquer ce qui précède à la fonction $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} \int_0^t uf(u) du & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{1}{2} f(0) & \text{si } t = 0 \end{cases})$

4. On suppose que pour tout $x > 0$, $F(x) = 0$. Montrer que f est nulle.

FIN DE L'ÉPREUVE