



MP – CPGE MOHAMMED VI-KÉNITRA
Année scolaire 25/26

DEVOIR LIBRE n°4

à rendre le 28/11/2025

PROBLÈME

On note n un entier supérieur ou égal à 1 et V_n l'espace vectoriel sur \mathbb{C} formé des applications de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} qui sont périodiques de période n , c'est-à-dire que $\forall f \in V_n, f(a+n) = f(a)$ pour tout a dans \mathbb{Z} .

Les opérations vectorielles de V_n sont définies de la manière usuelle

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a), \quad (\lambda f)(a) = \lambda f(a)$$

pour f, g dans V_n, a dans \mathbb{Z} et λ dans \mathbb{C} .

1. On considère, pour $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1$, les applications $f_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par :

$$f_k(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv k[n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1a. Montrer que $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ est une base \mathcal{B} de V_n .

1b. En déduire un isomorphisme u de V_n sur \mathbb{C}^n .

2. 2a. Déterminer l'ensemble U des nombres complexes r tels que les applications $e_r : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par $e_r(a) = r^a$, appartient à V_n .

2b. Montrer que la famille $(e_r)_{r \in U}$ est une base de V_n qu'on note (e_U) .

3. Soit φ l'endomorphisme de V_n défini par :

$$(\varphi(f))(a) = f(a+1), \quad f \in V_n \text{ et } a \in \mathbb{Z}.$$

3a. Montrer que toute valeur propre de φ est une racine n -ième de l'unité.

3b. Établir la réciproque de 3a. et en déduire que toute fonction f de V_n s'écrit de manière unique sous la forme

$$(*) \quad f(a) = \sum_{r \in U} \lambda_r r^a, \quad \lambda_r \in \mathbb{C}.$$

3c. φ est-il diagonalisable ?

4. **4a.** Calculer la matrice de φ dans la base \mathcal{B} du 1a.
- 4b.** Calculer le polynôme caractéristique de φ et retrouver ainsi le résultat de la question 3c.
5. Montrer que toute application linéaire ψ de V_n dans V_n qui commute avec φ est combinaison linéaire de $Id, \varphi, \dots, \varphi^{n-1}$ à coefficients complexes. Id désigne l'endomorphisme identique de V_n .

FIN DE L'ÉPREUVE