



MP – CPGE MOHAMMED VI-KÉNITRA
Année scolaire 25/26

DEVOIR LIBRE n°3

à rendre le 13/11/2025

Problème : Ici, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} et p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer successivement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que

1a. la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;

1b. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ converge ;

1c. la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k$ converge.

2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ semblables. Montrer que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (resp. est bornée) si, et seulement si, la suite $(B^n)_{n \in \mathbb{N}}$, converge (resp. est bornée).

3. On suppose que $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ admet une seule valeur propre 1, que $|\lambda| = 1$ et que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que M est une matrice scalaire. (on pourra commencer par le cas $p = 2$, puis se ramener à ce cas).

4. Caractériser à l'aide de leur spectre les matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

5. 5a. Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que sa limite est un projecteur qui commute à M .

5b. Montrer que la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\text{sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset D(0, 1) \cup \{1\}$, et que $\dim E_1(M) = m(1)$ où $m(1)$ est la multiplicité de 1 en tant que valeur propre. Exprimer l'image et le noyau de la limite P en fonction des espaces propres de M .

6. Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. On pose

$$B_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n A^k$$

7a. Montrer que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence B . Montrer que B est un projecteur et que $AB = BA = B$.

7b. Montrer que $\text{Ker}(B) = \text{Im}(I_p - A)$ et que $\text{Im}(B) = \text{Ker}(I_p - A)$.

7c. Montrer que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

7d. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M^k$ converge.

8. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} M^n$ converge. (on rappelle que la

série $\sum_{n \in \mathbb{N}} M^n$ converge si, et seulement si, la suite de somme partielles de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^n M^k \text{ converge }).$$

FIN DE L'ÉPREUVE