MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 25/26

Devoir libre $n^\circ 2$

à rendre le 18/10/2025

Exercice 01

Soit A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

1. Montrer que $C = \{\, x \in E \mid d(x, A) = d(x, B) \,\}$ est fermé et $D = \{\, x \in E \mid d(x, A) < d(x, B) \,\}$ est ouvert.
(On rappelle que $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$)

2. Si A et B sont fermées et disjointes, il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 02

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de E, on pose :

$$\|P\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

1. Démontrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$: $P \mapsto \|P\|$ est une norme sur E.
Dans la suite, on désigne par d la distance sur E associée à cette norme :

$$\forall P, Q \in E, \quad d(P, Q) = \|P - Q\|.$$

2. Montrer que $F = \{\, P \in E \mid \|P\| \leq 1 \,\}$ est une partie fermé de E.

3. On considère, dans E, la suite de terme général $P_n = X^n$.

3*a*. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \in F$, puis calculer $d(P_i, P_j)$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ et $i \neq j$.

3*b*. Démontrer que toute suite extraite de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente dans E. En déduire que F n'est pas une partie compacte de E.

Exercice 03

1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. Montrer que l'application u est de rang r si, et seulement si, il existe des formes linaires sur E, $l_1, l_2, ..., l_r$ linéairement indépendantes et des vecteurs de F, $a_1, a_2, ..., a_r$ linéairement indépendants tels que
$$\forall x \in E, \ \ u(x) = \sum_{i=1}^{r} l_i(x) a_i$$
2. Soit $(E, \|.\|)$ un sous-espace vectoriel normé et F un sous-espace fermé de $(E, \|.\|)$. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel G de dimension finie de E, le sous-espace vectoriel $H = F + G$ est fermé dans $(E, \|.\|)$.
(on peut procéder par récurrence sur la dimension $p \geq 1$ de G)
3. Soit $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|')$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F de rang fini. Montrer que l'application linéaire u est continue si, et seulement si, $\operatorname{Ker} u$ est un fermé dans $(E, \|.\|)$.
4. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel de dimension finie et $(F, \|.\|')$ un espace vectoriel normé. Montrer que toute application linéaire de E dans F est continue.

Fin de l'épreuve