



MP – CPGE MOHAMMED VI-KÉNITRA
Année scolaire 25/26

DEVOIR LIBRE n°1

à rendre le 20/09/2025

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on note \bar{x} sa classe modulo 2^n . Soit U_n le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Montrer que

1. $\text{card } U_n = 2^{n-1}$.
2. $5^{2^{n-3}} \equiv 2^{n-1} + 1 \pmod{2^n}$.
3. $\bar{5}$ est d'ordre 2^{n-2} dans U_n .
4. $\bar{x} \in U_n$ implique $\bar{x} = \bar{5}^k$ ou $\bar{x} = -\bar{5}^k$ avec $0 \leq k < 2^{n-2}$.
5. U_n n'est pas cyclique.

Exercice 2

Soient \mathbb{K} un corps commutatif et H l'ensemble des matrices de la forme

$$M(w, x, y, z) = \begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{pmatrix}$$

où (w, x, y, z) parcourt \mathbb{K}^4 .

1. Montrer que H est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients dans \mathbb{K} contenant la matrice unité. La multiplication est-elle commutative dans H ?
2. Chercher les éléments de H inversibles dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ et calculer leurs inverses. Déduire l'ensemble des éléments inversibles de H .
3. H est-il un corps lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Exercice 3

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{ a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \}$ où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

1. Montrer que si α et β sont dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.
2. Trouver les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
3. Vérifier que quel que soit $w \in \mathbb{Z}[i]$, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|w - \alpha| < 1$.
4. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{Z}[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $\mathbb{Z}[i]$, il existe q et r dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $\alpha = \beta q + r$ avec $|r| < |\beta|$.

FIN DE L'ÉPREUVE