Devoir libre $n^\circ 13$

à rendre le 11/3/2022

Exercice 1

On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du six, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsque l'on obtient le premier six, on tire une boule de l'urne, et l'expérience s'arrête.

1. Pour k entier naturel non nul, soit A_k l'événement : « on a obtenu le premier six au k-ième lancer du dé »

1*a*. Calculer $p(A_k)$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) = 1$.

1*b*. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au troisième lancer ?

1*c*. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six au plus tard au k-ième lancer ?

1*d*. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier six après le k-ième lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $(2k)$-ième lancer ?

2. On appelle B l'événement : « on a obtenu la boule blanche ».

2*a*. Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné de six, quelle est la composition de l'urne juste avant qu'on ne lance le dé pour la k-ième fois ?

2*b*. En déduire $p(B \cap A_k)$, puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(B \cap A_k)$.

2*c*. Calculer $p(B)$.

Exercice 2

1. Montrer qu'il existe une solution unique f, développable en série entière sous la forme $f(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, de l'équation différentielle :

$$(E)\ \ 2xy'' + y' - y = 0.$$

Déterminer le rayon de convergence de cette série et calculer sa somme à l'aide de fonctions usuelles.

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^*$. On pourra effectuer le changement de fonction $y = zf(x)$.

Problème

Première partie

Une urne contient 7 boules : 5 boules blanches et 2 boules noires. Un joueur extrait simultanément deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité qu'il tire deux boules blanches.

2. Le joueur participe maintenant au jeu suivant :
- s'il tire deux boules blanches il gagne x francs ($x \geq 0$) ;
- s'il tire deux boules noires il perd $10x$ francs ;
- s'il tire une boule blanche et une boule noire, il procède à un second tirage de deux boules, sans remettre les deux premières boules tirées :

à l'issue de ce second tirage il gagne y francs s'il tire deux boules blanches, sinon il perd 3 francs.

On désigne par G la variable aléatoire dont les valeurs sont égales aux gains (positifs ou négatifs) du joueur.

2*a*. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

2*b*. Calculer, en fonction de y, l'espérance mathématique de la variable aléatoire G. Déterminer y pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire $E(G) = 0$.

2*c*. Pour cette valeur de y, calculer l'écart-type $\sigma(G)$ de la variable G en fonction de x.

Deuxième Partie

Soit la fonction f, définie pour tout réel x, par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{110x^2 + 60}{21}}.$$

1. Déterminer le réel α tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \alpha x] = 0$.

Quel est le signe de $f(x) - \alpha x$ pour $x \geq 0$?

2. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ et ses asymptotes dans un repère orthonormé (unité : $1,5$ cm).

3. Déterminer l'entier naturel x pour lequel l'écart-type $\sigma(G)$ de la première partie est compris entre 7 et 8.

Fin de l'épreuve