

DEVOIR LIBRE n°11

à rendre le 18/2/2022

Exercice 1

Soit $a > 0$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux. On suppose que f est intégrable sur $]a, +\infty[$ et qu'il existe $l \in \mathbb{R}_+$ tel que $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Montrer que $l = 0$.

Exercice 2

Établir l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\dots(t+n)}$ où n est un entier naturel non nul.
2. $\int_0^{+\infty} tE\left(\frac{1}{t}\right) dt$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x .
3. $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(t)}}{t} dt$.

Exercice 3

1. Déterminer un équivalent simple de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ au voisinage de $+\infty$.
2. Donner un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ de $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

Exercice 4

1. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ sont convergentes et qu'elles sont égales.
2. **2a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{t^2} dt$, $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt$ et $B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nt \cot^2 t dt$.
Montrer que $A_n \leq I_n \leq B_n$.
2b. Calculer $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ et $A_n - B_n$. En déduire A_n et B_n .
2c. Montrer que la suite $\left(\frac{I_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 5

Soit $a > 0$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue, on suppose que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe.

1. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. Soit $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [n, n+1], \varphi(x) = \begin{cases} 4 \cdot 6^n(x-n) & \text{si } x \in \left[n, n + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \right[\\ -4 \cdot 6^n \left(x - n - \frac{1}{3^n} \right) & \text{si } x \in \left[n + \frac{1}{2 \cdot 3^n}, n + \frac{1}{3^n} \right[\\ 0 & \text{si } x \in \left[n + \frac{1}{3^n}, n+1 \right] \end{cases}$$

2a. Tracer l'allure du graphe de φ et calculer $\varphi(n)$ et $\varphi\left(n + \frac{1}{2 \cdot 3^n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2b. Montrer alors que φ n'admet pas de limite en $+\infty$.

2c. Montrer que φ est continue sur $[0, +\infty[$.

2d. Montrer que φ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$.

2e. Conclure.

Exercice 6

On désigne par $\mathcal{L}^1$ (resp. $\mathcal{L}^2$) l'espace vectoriel des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que f (resp. f^2) soit intégrables sur $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f, f'' \in \mathcal{L}^2$.

1. Montrer que $ff'' \in \mathcal{L}^1$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2(t)dt$ converge si, et seulement si, ff' admet une limite finie en $\pm\infty$.
3. Montrer que si $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ alors f^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
4. Dédire de ce qui précède que $f'^2 \in \mathcal{L}^2$.
5. On pose $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)f'(x)$. Montrer que $l = 0$.
6. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2(t)dt \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f'')^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE