Devoir libre $n°8$

à rendre le 12/1/2022

Problème I : Séries alternées

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique telle que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n = (-1)^n a_n$ où :

◇ (H1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend en décroissant vers 0,

◇ (H2) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n > 0$,

◇ (H3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$,

◇ (H4) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_{n+2} - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_n$.

1. On pose $R_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|R_n| + |R_{n+1}| = a_n$.

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $|R_n| - |R_{n+1}| = \sum\limits_{p=0}^{\infty} (-1)^p (a_{n+p} - a_{n+1+p})$.

En déduire la monotonie de la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, et la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$.

3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $\dfrac{a_n}{2} \leq |R_n| \leq \dfrac{a_{n-1}}{2}$.

4. En déduire qu'au voisinage de l'infini, $R_n \sim \dfrac{u_n}{2}$.

5. Applications :

5*a*. Équivalent de la suite $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, nature et calcul de la somme la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

5*b*. Équivalent de la suite $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k}}{2k+1}$, nature et calcul de la somme la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k}}{2k+1}$.

5*c*. Équivalent de la suite $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2}$, nature et calcul de la somme la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

5*d*. Équivalent de la suite $\sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{\ln(k)}{k}$, nature et calcul de la somme la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} \dfrac{\ln(k)}{k}$.

6. Autre méthode : Reprendre les questions **5a), 5b)** et **5c)** en notant que

$$\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-kt}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} te^{-kt}\mathrm{d}t.$$

6*a*. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t$. Nature et calcul de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

6*b*. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}=(-1)^{n}\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Nature et calcul de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}$.

6*c*. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=(-1)^{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{te^{-nt}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t$. Nature et calcul de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Problème II : Cosinus et sinus d'une matrice

-1-

$\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'ensemble des matrices carrées d'ordre p, à éléments réels.

1. $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ est un élément de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on pose

$$N(A)=c\sup_{1\leq i,j\leq p}|a_{ij}|.$$

où c est une constante réelle, positive.

1*a*. Montrer que l'on peut peut déterminer c tel que $A\mapsto N(A)$ soit une norme sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété :

$$\forall A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R}),\ \ \forall B\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R}),\ \ N(AB)\leq N(A)N(B).$$

1*b*. $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ étant ainsi normé, on envisagera au cours de ce problème des suites convergentes de matrices. La convergence de telles suites dépend-elle du choix de cette norme sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$?

2. Soit ω_p l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^p$, qui possèdent p valeurs propres réelles et distincts. f et g sont deux éléments de ω_p, démontrer que si $f\circ g=g\circ f$, alors f et g ont les mêmes vecteurs propres.

3. $\mathbb{R}^p$ est rapporté à sa base canonique, on représente par le même symbole ω_p l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ associées aux endomorphismes définis au **2**.

3*a*. Montrer que pour tout élément A de ω_p, il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

3*b*. Démontrer que deux éléments A et B de ω_p commutent si, et seulement si, il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

3c. A est un élément de ω_p dont les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer l'existence et l'unicité d'une matrice B de ω_p de valeurs propres positives ou nulles et telle que $B^2 = A$.

-2-

On suppose $p = 3$, I représente la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. A élément de ω_3, peut donc s'écrire sous la forme (cf **1.3.3a.**) PDP^{-1}. D matrice diagonale. Écrire sous une forme analogue :
$$A^n,\ n \text{ entier positif}, \sum_{k=0}^{n} a_k A^k,\ a_k \in \mathbb{R},\ A^0 = I.$$

2. On pose alors :
$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!},\ \ C_n(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}.$$
Montrer que les suites $(S_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des matrices notées $\sin(A)$ et $\cos(A)$.

3. Démontrer que $[\cos(A)]^2 + [\sin(A)]^2 = I$.

4. A et B sont deux éléments de ω_3 tels que $AB = BA$. Calculer $\cos(A+B)$ et $\sin(A+B)$ en fonction de $\cos(A)$, $\cos(B)$, $\sin(A)$, $\sin(B)$.

Fin de l'épreuve