DEVOIR LIBRE n°3

à rendre le 29/10/2021

Problème

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

PARTIE I

1. On considère l'équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$:

$$(E) : r^3 - 1 = 0$$

1a. Vérifier que 1 est solution de (E) .

1b. Montrer que les deux racines de (E) différentes de 1 sont solution de

$$(E') : r^2 + r + 1 = 0$$

Résoudre (E') .

1c. On note j (respectivement $\bar{j}$) la racine de (E') de partie imaginaire positive (respectivement négative). Trouver le module et l'argument de j et $\bar{j}$.

2. Montrer les relations suivantes :

2a. $j^2 = \bar{j}$.

2b. $1 + j + j^2 = 0$.

2c. $\forall n \in \mathbb{N}, j^{3n} = 1, j^{3n+1} = j, j^{3n+2} = j^2$.

3. Dans $\mathbb{C}$, on considère le système linéaire à trois équations et trois inconnues α, β, γ :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + j\beta + j^2\gamma = 0 \\ \alpha + j^2\beta + j\gamma = 0 \end{cases}$$

Montrer que ce système a une solution unique et trouver cette solution.

PARTIE II

On veut résoudre le problème $(\mathcal{P})$ suivant :

Quelles sont toutes les suites de nombres complexes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_n.$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites de nombres complexes.

On définit la somme de deux éléments $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}$ par :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Le produit d'un élément de $\mathcal{E}$ par un nombre complexe λ est défini par :

$$\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$.
2. Soit $\mathcal{F}$ la partie de $\mathcal{E}$ définie par :

$$\mathcal{F} = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_n \}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

3. Montrer que la partie de $\mathcal{E}$ formée des trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 1, y_n = j^n, z_n = j^{2n}$$

est une partie libre de $\mathcal{F}$.

4. Montrer que l'application Φ de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{C}^3$ définie par :

$$\Phi[(u_n)_{n \in \mathbb{N}}] = (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{C}^3$$

est une application linéaire et bijective.

Quelle est la dimension de $\mathcal{F}$?

5. A partir des questions II. 3) et II. 4), trouver une base de $\mathcal{F}$ et en déduire la solution générale de $(\mathcal{P})$.

PARTIE III

Si $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre 3 à coefficients complexes, on rappelle que le déterminant de M vaut :

$$\det(M) = (V_1 \wedge V_2) \cdot V_3$$

où

$$V_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

sont les vecteurs colonnes de M et où $\wedge$ (respectivement $\cdot$) désigne le produit vectoriel (respectivement scalaire) dans $\mathbb{C}^3$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $r \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(A - rI)$.
2. Dédurre de ce résultat que si $r = 1, j$ ou j^2 , les vecteurs colonne de la matrice $A - rI$ ne sont pas linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^3$.
3. En déduire que si $r = 1, j$ ou j^2 , le sous-espace vectoriel I_r , de $\mathbb{C}^3$ défini par :

$$I_r = \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \text{ tels qu'il existe } w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \text{ vérifiant } (A - rI)w = v \right\}$$

est de dimension inférieure ou égale à 2.

Exercice

Soit $\mathcal{P}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\mathcal{P} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \}$$

et la matrice carrée $T_n(x, y)$ d'ordre $n \geq 2$:

$$T_n(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -y & -y & \dots & -y \\ -x & 1 & -y & \dots & -y \\ -x & -x & 1 & \dots & -y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x & -x & -x & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ où } (x, y) \in \mathcal{P}.$$

1. **1a.** Pour $(x, y) \in \mathcal{P}$, prouver que $\det T_n(x, y) = \frac{x(1+y)^n - y(1+x)^n}{x-y}$.
1b. Calculer $\det T_n(x, x)$.
1c. L'application définie sur $\mathcal{P}$ par : $(x, y) \mapsto T_n(x, y)$ est-elle continue en $(x_0, x_0) \in \mathcal{P}$?
2. **2a.** Dans le cas : $(x, y) \in \mathcal{P}$ et $x \neq y$, prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\det T_n(x, y)$ soit strictement positif est :

$$\frac{x}{(1+x)^n} < \frac{y}{(1+y)^n}$$

et que la condition $y \leq \frac{1}{n-1}$ est seulement suffisante.

2b. Prouver :

$$((x, x) \in \mathcal{P}) (\det T_n(x, x) > 0) \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{n-1} \right).$$

3. **3a.** Calculer les valeurs propres de $T_n(x, y)$ et préciser ses vecteurs propres. $T_n(x, x)$ est-elle diagonalisable ?
3b. Dans le cas où $(x, y) \in \mathcal{P}$ et $x \neq y$, déterminer les valeurs propres réelles ou complexes de $T_n(x, y)$ et montrer que ces valeurs propres appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ que l'on précisera.
 $T_n(x, y)$ est-elle diagonalisable ?

FIN DE L'ÉPREUVE