Devoir libre $n^\circ 1$

à rendre le 04/10/2021

Exercice 1

1. Montrer que $G = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{K}^* \right\}$ est un groupe multiplicatif de matrices de taille 2 ($\mathbb{K}$ est un corps commutatif).

2. ***2a.*** La matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Montrer que $G = \left\{ A^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$ est un groupe multiplicatif de matrices. Combien a-t-il d'éléments ? Quel est son élément neutre E ? Quel est l'inverse de A dans G ?

2b. Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme canoniquement associé E ?

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, F un sous-espace vectoriel de E et G un groupe fini d'automorphismes linéaires de E. Le sous-espace F est stable par les éléments de G. La composée $u \circ v$ sera notée uv. $\operatorname{card} G = m$.
Soit T l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ définie par :

$$\forall u \in \mathscr{L}(E), \;\; T(u) = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}ug.$$

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(E), \;\; \forall h \in G, T(u)h = hT(u)$.

2. Montrer que T est un projecteur de $\mathscr{L}(E)$.

3. ***3a.*** Soit p un projecteur de E dont l'image est F. Montrer que l'image de $T(p)$ est F.

3b. Montrer que le noyau de $T(p)$ est stable par tout élément de G.

Problème

On désigne par $\mathscr{B}$ le groupe des applications bijectives de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et par $\mathscr{D}$ le sous-groupe de $\mathscr{B}$ engendré par les applications r et s définis par :

$$r : z \mapsto r(z) = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right] z$$

$$s : z \mapsto \overline{z}$$

où $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et $\overline{z}$ est le conjugué z.

1. **1*a*.** Donner une interprétation géométrique de r et s.

   1*b*. Démontrer que $r^n = e$, $s^2 = e$ et $r \circ s \circ r = s$, avec e l'application identique.

2. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $r^p \circ s = s \circ r^{-p}$.

3. Démontrer que $\{r^h \circ s^k / (h, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $\mathscr{B}$. En déduire que tout élément de $\mathscr{D}$ peut s'écrire de manière unique sous forme de $r^h \circ s^k$ où $h \in \{0, 1, ..., n-1\}$ et $k \in \{0, 1\}$.
   Quel est le nombre d'éléments de $\mathscr{D}$?

4. Interpréter géométriquement les applications r^h et $r^h \circ s$.

5. On considère un groupe G noté multiplicativement, d'élément neutre e, et l'on suppose qu'il existe dans G deux éléments a et b distincts vérifiant les relations :

$$s^n = e,\ b^2 = e \text{ et } aba = b$$

   avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
   On désigne par H le sous-groupe engendré par a et b.

   5*a*. Démontrer que tout élément de H peut s'écrire sous forme $a^h b^k$, où $h \in \{0, 1, ..., n-1\}$ et $k \in \{0, 1\}$.

   5*b*. Peut-on sous hypothèse supplémentaire trouver le nombre d'éléments de H ?

   5*c*. Donner une condition nécessaire et suffisante concernant l'ordre du sous-groupe engendré par a et b et l'appartenance de b à ce sous-groupe pour que H ait le nombre d'éléments de $\mathscr{D}$. Donner une condition suffisante concernant n pour qu'il soit aussi.

Fin de l'épreuve