MP – CPGE Mohamed VI-Kénitra

Année scolaire 20/21

Devoir libre $n^\circ 09$

à rendre le 11/02/2021

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère les polynômes de Bernstein définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad B_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n} \complement_n^j x^j (1-x)^{n-j} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

On désigne par θ, u, v, w les fonctions suivantes définies sur $[0,1]$ par :

$$\theta(x) = 0,\quad u(x) = 1,\quad v(x) = x,\quad w(x) = x^2.$$

1. ***1a.*** Pour $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ fixés, on pose $\varphi(t) = (xe^t + 1 - x)^n$. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$. En déduire les polynômes de Bernstein de u, v et w.

1b. Montrer que la suite $(B_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers w.

Soit E l'algèbre des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans réelles. On définit une relation d'ordre non total $\preceq$ sur E par :

$$f \preceq g \Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\quad f(x) \leqslant g(x).$$

Une fonction f de E telle que $\theta \preceq f$ est dite positive. Un endomorphisme A de l'espace vectoriel E est dit positif s'il transforme toute fonction positive en une fonction positive.

2. ***2a.*** Montrer que si A est un endomorphisme positif de E, alors $\forall f \in E$, $|A(f)| \preceq A(|f|)$.

2b. Soient $f \in E$ et $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ ne dépendant que de f et de ε tel que

$$\forall x, y \in [0,1],\quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + \alpha(x-y)^2.$$

2c. En déduire que pour tout endomorphisme positif A de E, on a :

$$\forall y \in [0,1],\quad |A(f) - f(y)A(u)| \preceq \varepsilon A(u) + \alpha\left(A(w) - 2yA(v) + y^2 A(u)\right)$$

où $\preceq$ représente la relation d'ordre sur E définie ci-dessus.

3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes de l'espace vectoriel E qui possèdent les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n est un endomorphisme positif de E.
- Les suites $(A_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$, $(A_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$, $(A_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $[0,1]$ respectivement vers u, v, w.

3a. Montrer que si on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = A_n(w) - 2vA_n(v) + wA_n(u)$, la suite $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers θ.

3*b*. En appliquant la formule du 2)c) au point y avec A_n au lieu de A, montrer que pour tout $f \in E$, la suite $(A_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

4. Déduire de ce qui précède que toute fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de fonctions polynômes.

5. En déduire le théorème de Weierstrass : *toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs complexes est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.*

Fin de l'épreuve