Devoir libre $n^\circ 1$

à rendre le 14/09/2020

Exercice :1

1. Montrer que le réel $\alpha = \sqrt[3]{2}$ est irrationnel.
2. Montrer que la famille $(1, \alpha, \alpha^2)$ est libre dans $\mathbb{R}$, en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
3. On désigne par F l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de $(1, \alpha, \alpha^2)$. Montrer que F est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et un anneau.
4. Soit x un élément non nul de F. On considère l'application :

$$\varphi_x : \begin{array}{ll} F & \longrightarrow F \\ y & \longmapsto xy \end{array}$$

   a) Montrer que φ_x est $\mathbb{Q}$-linéaire.
   b) Montrer que φ_x est injective.
   c) En déduire que F est un corps. Montrer que F est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant le nombre réel α.

Exercice 2

On considère la suite $(a_n)_{n\in N}$ de nombres réels définie par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!} X^{n-k}$. En particulier on a, pour $n = 1, 2, 3$:

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{12}, a_3 = 0$$
$$A_1 = X - \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}, A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X$$

1. Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes vérifiant :

$$(i)\ A_0 = 1 \quad (ii)\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ A_n' = A_{n-1} \quad (iii)\quad A_n(0) = A_n(1).$$

2. ***2a.*** Déduire de la propriété d'unicité de 1) que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n(X) = (-1)^n A_n(1 - X)$$

2b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ A_n(X+1) - A_n(X) = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.

2*c*. Soit n un entier impair et supérieur ou égal à 3. Montrer que A_n est divisible par $X(X-1)(2X-1)$ et que $a_n = 0$.

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \in \mathbb{N},\ S_n(m) = \sum_{k=0}^{m} k^n$.

3*a*. Exprimer $S_n(m)$ en fonction de $A_n(m+1)$ et a_{n+1}.

3*b*. Déterminer $S_2(m)$.

4. Montrer que $(A_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

5. On considère les endomorphismes de E définis par :

$$\triangle : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \qquad D : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$$

5*a*.) Montrer que $D^{n+1} = \triangle^{n+1} = 0$ et que $\triangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{D^k}{k!}$.

5*b*. Montrer que $\mathrm{Ker}(\triangle) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{Im}(\triangle) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire qu'il existe un unique $Q \in E$ tel que $\triangle(Q) = D(P)$ et $Q(0) = P(0)$.

5*c*. On pose $u(P) = Q$. Montrer que $u \in GL(E)$.

5*d*. Montrer que : $\forall P \in E\ \ u(P) = P(X) + \sum_{k=1}^{n} a_k[P^{(k)}(X) - P^{(k)}(0)]$.

Fin de l'épreuve

CPGE Mohamed VI-Kénitra