Première partie

Soit λ un nombre réel strictement positif. Dans un repère orthonormé (oxy) du plan euclidien, on considère le graphe Γ_λ de la fonction f_λ, continue sur l'intervalle $[0,1]$, et telle que l'on ait, pour tout $x \in]0,1[$,

$$f_\lambda(x) = \left(1 - x^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\lambda.$$

On note A le point de coordonnées $(1,0)$ et B le point de coordonnées $(0,1)$.

1. Calculer les dérivées première et seconde de la fonction f_λ par rapport à x, et étudier leur signe pour $0 < x < 1$ en discutant selon la valeur de λ.
2. Vérifier que la droite d'équation $y = x$ est un axe de symétrie commun à toutes les courbes Γ_λ, et calculer l'abscisse du point S_λ de Γ_λ situe sur cet axe de symétrie.
3. En fonction de λ, discuter si Γ_λ tourne la concavité vers les $y > 0$ ou vers les $y < 0$.
4. De l'étude qui précède, déduire que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si a et b sont des nombres réels tels que $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$, on a les inégalités :

$$(a+b)^n + \left(\sqrt[n]{1-a^n} + \sqrt[n]{1-b^n}\right)^n \leq 2^n$$

et

$$\sqrt[n]{a+b} + \sqrt[n]{\left(1-\sqrt[n]{a}\right)^n + \left(1-\sqrt[n]{b}\right)^n} \geq \sqrt[n]{2}.$$

Deuxième partie

Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose

$$F(\lambda) = \lambda \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^\lambda dt$$

1. Sans chercher à calculer cette intégrale, montrer qu'elle convergente.
2. Montrer que l'aire du domaine bornée par Γ_λ, le segment OA de l'axe (ox) et le segment OB de l'axe (oy), a pour mesure $F(\lambda)$.
3. a. En fonction de λ, calculer l'aire du triangle OAS_λ, et comparer $F(\lambda)$ à cette aire.

   b. Quelle est la valeur des limites de $F(\lambda)$ quand λ tend vers 0 ? tend vers $+\infty$?

   c. De la question 3.(a) de cette partie, déduire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F(n)$ converge, et que la somme σ de cette série est inférieure à 1.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $F(n)$ successivement par les deux méthodes suivantes :
   - En se débarrassant du facteur t^{n-1} sous l'intégrale grace à une intégration par parties.
   - En développant $(1-t)^n$ par la formule de binôme de Newton avant d'intégrer.

   En déduire la formule :

$$n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\complement_n^k}{n+k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

5. On considère l'équation différentielle : (E) $\ (4x - x^2)y' - (x+2)y = x$.

   a. Montrer qu'il existe une série entière et une seule $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, et dont la somme S soit, pour $x \in]-R, R[$, solution de (E). Que veut R ? Vérifier que $\sigma = S(1)$.

   b. i. Calculer les primitives de la forme $\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$, où $0 < x < 4$.

   ii. Trouver la solution générale de (E) pour $0 < x < 4$.

   iii. Parmi les solutions de (E) pour $0 < x < 4$, montrer qu'il existe une et une seule telle que $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y(x)}{x}$ existe et soit finie, et en déduire que, pour $0 < x < 4$, on a la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \frac{1}{4-x}\left(x + 4\sqrt{\frac{x}{4-x}} \arcsin\sqrt{\frac{x}{4}}\right).$$

   c. En déduire la valeur de σ.

•••••••••