

Devoir surveillé n°06
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.



Exercice : 1

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. Par définition d'une matrice orthogonale, les colonnes de A forment une base orthonormée de \mathbf{R}^n pour le produit scalaire canonique.
Pour chaque colonne $j \in \{1, \dots, n\}$, si l'on note C_j le vecteur colonne correspondant, on a :

$$\|C_j\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$$

Comme il s'agit d'une somme de termes positifs, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$0 \leq a_{i,j}^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{k,j}^2 = 1$$

En appliquant la racine carrée, on obtient bien :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad |a_{i,j}| \leq 1$$

2. Pour démontrer que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est compact dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, il suffit de montrer que c'est une partie fermée et bornée.
- D'après la question 1, pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, on a $|a_{i,j}| \leq 1$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. En utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$, on en déduit que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
 - Considérons l'application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $\phi(A) = {}^tAA$. Cette application est continue car ses composantes sont des fonctions polynomiales des coefficients de A . On remarque que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) = \phi^{-1}(\{I_n\})$. Comme $\{I_n\}$ est un singleton (donc un fermé) et que ϕ est continue, l'image réciproque $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Ainsi, $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ étant fermé et borné dans un espace de dimension finie, c'est une partie compacte.

3. (a) Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $S = P\Delta {}^tP$, où $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale des valeurs propres de S .
Pour toute matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, on a :

$$T(A) = \text{Tr}(AS) = \text{Tr}(AP\Delta {}^tP)$$

Par la symétrie de l'application trace, on obtient :

$$T(A) = \text{Tr}({}^tPAP\Delta)$$

Posons $B = {}^tPAP$. Comme le produit de matrices orthogonales est une matrice orthogonale, on a $B \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. On a donc bien :

$$T(A) = \text{Tr}(B\Delta)$$

- (b) L'application $T : A \mapsto \text{Tr}(AS)$ est une application linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, elle est donc continue. D'après la question 2, $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Toute application numérique continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Par conséquent, T admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, noté t .

- (c) Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. D'après la question 3a, il existe $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ telle que $T(A) = \text{Tr}(B\Delta)$.
On développe la trace du produit B avec la matrice diagonale Δ :

$$T(A) = \sum_{i=1}^n b_{ii} \lambda_i$$

Or, d'après la question 1, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $|b_{ii}| \leq 1$, donc $b_{ii} \leq 1$. Comme $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$, ses valeurs propres λ_i sont positives. On en déduit :

$$T(A) \leq \sum_{i=1}^n 1 \cdot \lambda_i = \text{Tr}(\Delta) = \text{Tr}(S)$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $A \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, donc on a $t \leq \text{Tr}(S)$. En choisissant $A = I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, on a

$$T(I_n) = \text{Tr}(I_n S) = \text{Tr}(S).$$

Le maximum est donc atteint et vaut $t = \text{Tr}(S)$.

Exercice : 2

1. (a) L'événement A_k « on a obtenu le premier six au k -ème lancer du dé » signifie que :

- Les $k - 1$ premiers lancers ont donné un résultat différent de 6 avec une probabilité $\frac{5}{6}$.
- Le k -ème lancer a donné un 6 avec une probabilité $\frac{1}{6}$.

Par indépendance des lancers, on a :

$$p(A_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$$

Il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{5}{6} \in]0, 1[$. D'où :

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^j = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{6} \times 6 = 1.$$

- (b) Cherchons la probabilité de l'événement « avoir obtenu le premier six au plus tard au troisième lancer ». Cet événement est la réunion disjointe des événements A_1, A_2 et A_3 . On a donc :

$$p = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{36 + 30 + 25}{216} = \frac{91}{216}$$

- (c) L'événement « avoir obtenu le premier six au plus tard au k -ème lancer » est le complémentaire de l'événement « n'avoir obtenu aucun six durant les k premiers lancers ».

On en déduit :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

On peut également retrouver ce résultat directement :

$$\sum_{i=1}^k p(A_i) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

(d) Soit F_n l'événement « obtenir le premier six au plus tard au n -ème lancer ». La probabilité demandée est $p(\overline{F}_k | F_{2k})$. On a vu dans la question 1.c), que $P(F_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Par définition :

$$p(\overline{F}_k | F_{2k}) = \frac{p(\overline{F}_k \cap F_{2k})}{p(F_{2k})}$$

L'intersection $\overline{F}_k \cap F_{2k}$ signifie que le premier six arrive entre le rang $k + 1$ et $2k$. Donc sa probabilité est $p(F_{2k}) - p(F_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^k - \left(\frac{5}{6}\right)^{2k}$. D'où :

$$p(\overline{F}_k | F_{2k}) = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^k - \left(\frac{5}{6}\right)^{2k}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2k}} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^k \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)}{\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right) \left(1 + \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^k}{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^k}.$$

2. (a) D'après l'énoncé, l'urne contient initialement une boule blanche. À chaque lancer où l'on n'obtient pas un six, une boule rouge est ajoutée.

Si les $k - 1$ premiers lancers n'ont pas donné de six, cela signifie que $k - 1$ boules rouges ont été ajoutées successivement à l'urne.

Juste avant de lancer le dé pour la k -ième fois, la composition de l'urne est la suivante :

- 1 boule blanche ;
- $k - 1$ boules rouges.

L'urne contient donc au total $(k - 1) + 1 = k$ boules.

(b) Par définition des probabilités conditionnelles :

$$p(B \cap A_k) = p(A_k) \times p(B | A_k)$$

D'après la question 1.a), $p(A_k) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$. D'après la question 2.a), si A_k est réalisé, l'urne contient k boules (1 blanche et $k - 1$ rouges) au moment du tirage. Donc $p(B | A_k) = \frac{1}{k}$. Ainsi :

$$p(B \cap A_k) = \frac{1}{6k} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

On en déduit la somme demandée :

$$\sum_{k=1}^n p(B \cap A_k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

(c) La famille $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6k} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

On utilise le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 - x)$ pour $|x| < 1$:

$$\ln(1 - x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

D'où :

$$p(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{5} \left[-\ln \left(1 - \frac{5}{6}\right) \right] = \frac{\ln(6)}{5}.$$

Problème 1 :

1. (a) L'ensemble Ω_n représente l'ensemble des listes de longueur n formées des éléments de $\{F, P\}$. Donc on peut confondre un élément de Ω_n avec un élément de $\{T, P\}^n$, donc $\text{card}(\Omega_n) = 2^n$.

Par définition de $p_n(A) = \frac{\text{card}(A)}{2^n}$, on a pour $A = \Omega_n$:

$$p_n(\Omega_n) = \frac{\text{card}(\Omega_n)}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} = 1$$

- (b) Soient A et B deux parties disjointes de Ω_n . Par propriété du cardinal d'une réunion disjointe :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

En divisant par 2^n , on obtient par définition de p_n :

$$\frac{\text{card}(A \cup B)}{2^n} = \frac{\text{card}(A)}{2^n} + \frac{\text{card}(B)}{2^n}$$

$$p_n(A \cup B) = p_n(A) + p_n(B)$$

En conclusion, p_n définit une probabilité sur Ω_n car elle est positive, $p_n(\Omega_n) = 1$ et additive pour les événements disjoints.

Ceci est suffisant pour conclure que p_n est une probabilité sur $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n))$ puisque Ω_n est fini.

2. (a) Pour $n \geq 3$, l'ensemble A_n est formé des listes de longueur n ne contenant pas la séquence "FFF". Une liste $\omega \in A_n$ commence nécessairement par l'une des trois cas suivants :

- **Elle commence par un 'P'** : La liste est de la forme $\omega = (P, \omega')$ où $\omega' \in A_{n-1}$. C'est l'événement $B_n = \{\omega \in A_n \mid \omega \text{ commence par } P\}$.
- **Elle commence par 'FP'** : La liste est de la forme $\omega = (F, P, \omega'')$ où $\omega'' \in A_{n-2}$. C'est l'événement $C_n = \{\omega \in A_n \mid \omega \text{ commence par } FP\}$.
- **Elle commence par 'FFP'** : La liste est de la forme $\omega = (F, F, P, \omega''')$ où $\omega''' \in A_{n-3}$. C'est l'événement $D_n = \{\omega \in A_n \mid \omega \text{ commence par } FFP\}$.

Les événements B_n, C_n et D_n sont deux à deux disjoints car une liste ne peut pas commencer par P et F simultanément, ni par FP et FF simultanément.

Toute suite de A_n qui ne commence pas par P commence forcément par F . Si elle commence par F , elle est suivie soit par P (cas C_n), soit par F . Si elle commence par FF , elle doit être suivie par P (cas D_n), car si elle était suivie par un troisième F , elle contiendrait "FFF" et serait exclue de A_n . Donc

$$A_n = B_n \cup C_n \cup D_n.$$

- (b) D'après la partition établie en 2a, on a :

$$\text{card}(A_n) = \text{card}(B_n) + \text{card}(C_n) + \text{card}(D_n)$$

Exprimons chaque cardinal en fonction des termes précédents :

- Pour B_n , le premier symbole est fixé (P), les $n - 1$ suivants forment une liste de A_{n-1} , donc $\text{card}(B_n) = \text{card}(A_{n-1})$.
- Pour C_n , les deux premiers symboles sont fixés (FP), les $n - 2$ suivants forment une liste de A_{n-2} , donc $\text{card}(C_n) = \text{card}(A_{n-2})$.
- Pour D_n , les trois premiers symboles sont fixés (FFP), les $n - 3$ suivants forment une liste de A_{n-3} , donc $\text{card}(D_n) = \text{card}(A_{n-3})$.

On a donc :

$$\text{card}(A_n) = \text{card}(A_{n-1}) + \text{card}(A_{n-2}) + \text{card}(A_{n-3})$$

En divisant chaque terme par 2^n pour obtenir les probabilités $u_n = \frac{\text{card}(A_n)}{2^n}$:

$$\frac{\text{card}(A_n)}{2^n} = \frac{\text{card}(A_{n-1})}{2^n} + \frac{\text{card}(A_{n-2})}{2^n} + \frac{\text{card}(A_{n-3})}{2^n}$$

On obtient bien la relation :

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2} + \frac{1}{8}u_{n-3}$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une probabilité, on a donc $0 \leq u_n \leq 1$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On a la majoration :

$$|u_n z^n| \leq |z|^n$$

La série géométrique $\sum_{n \in \mathbb{N}} |z|^n$ converge car $|z| < 1$. Par comparaison, la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < 1$.

- (b) On utilise la relation de récurrence valable pour $n \geq 3$:

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{4}u_{n-2} + \frac{1}{8}u_{n-3}$$

Multiplions par z^n et sommons pour n allant de 3 à $+\infty$:

$$\sum_{n=3}^{\infty} u_n z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} u_{n-1} z^n + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} u_{n-2} z^n + \frac{1}{8} \sum_{n=3}^{\infty} u_{n-3} z^n.$$

En effectuant des changements d'indices ($j = n - 1, j = n - 2, j = n - 3$), on fait apparaître $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$:

$$f(z) - u_0 - u_1 z - u_2 z^2 = \frac{z}{2}(f(z) - u_0 - u_1 z) + \frac{z^2}{4}(f(z) - u_0) + \frac{z^3}{8}f(z)$$

Avec les conditions initiales $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1$:

$$f(z) \left(1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} \right) = 1 + z + z^2 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4}.$$

En multipliant tout par 8 pour simplifier les fractions :

$$f(z)(8 - 4z - 2z^2 - z^3) = 8 + 4z + 2z^2$$

D'où :

$$f(z) = -\frac{2z^2 + 4z + 8}{z^3 + 2z^2 + 4z - 8}.$$

4. (a) Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 8$. La fonction P est dérivable sur \mathbf{R} et $P'(x) = 3x^2 + 4x + 4$. Le discriminant de P' est $\Delta = 16 - 48 = -32 < 0$. Le coefficient de x^2 étant positif, $P'(x) > 0$ sur \mathbf{R} .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P'(x)$		+	
$P(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

P est donc strictement croissante et continue sur \mathbf{R} . Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \pm\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique racine réelle α .

Calculons les valeurs de P aux bornes de l'intervalle :

- $P(1) = 1 + 2 + 4 - 8 = -1 < 0$
- $P(1,1) = 1,331 + 2(1,21) + 4,4 - 8 = 1,331 + 2,42 + 4,4 - 8 = 8,151 - 8 = 0,151 > 0$

Comme $P(1) < 0 < P(1,1)$, par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $\alpha \in]1, 1,1[$.

- (b) Pour calculer une valeur approchée de l'unique racine réelle α située dans l'intervalle $[1; 1,1]$, on peut utiliser la méthode de Newton définie par la donnée de x_0 et la suite (x_n) telle que :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 4x_n - 8}{3x_n^2 + 4x_n + 4}$$

En choisissant $x_0 = 1,1$, la suite converge vers α de manière quadratique, car P est strictement croissante et convexe sur cet intervalle ($P'(x) > 0$ et $P''(x) = 6x + 4 > 0$).

- (c) Soit $P(z) = z^3 + 2z^2 + 4z - 8$ le polynôme étudié. Nous savons que $P(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$8 = \alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha$$

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ une autre racine de P . On a $P(z_0) = 0$, donc $8 = |-z_0^3 - 2z_0^2 - 4z_0|$. D'après l'inégalité triangulaire :

$$8 = |z_0^3 + 2z_0^2 + 4z_0| \leq |z_0|^3 + 2|z_0|^2 + 4|z_0|$$

Considérons la fonction $g : x \mapsto x^3 + 2x^2 + 4x$ sur \mathbf{R}^+ . Cette fonction est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. L'inégalité précédente s'écrit :

$$g(\alpha) \leq g(|z_0|)$$

Par stricte croissance de g , on en déduit que $|z_0| \geq \alpha$. Cependant, l'égalité dans l'inégalité triangulaire n'a lieu que si les termes $z_0^3, 2z_0^2, 4z_0$ sont positivement liés. Cela impliquerait que z_0 est un réel positif. Or, nous avons montré en 4a que α est l'unique racine réelle positive. Ainsi, pour toute autre racine $z_0 \neq \alpha$, l'inégalité est stricte :

$$|z_0| > \alpha$$

5. (a) Les racines α, z_0, \bar{z}_0 du polynôme P sont distinctes (une réelle et deux complexes non réelles car $\Delta(P') < 0$). Notons $L_1(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)$, $L_2(z) = (z - \alpha)(z - z_0)$ et $L_3(z) = (z - \alpha)(z - \bar{z}_0)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des complexes tels que

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0.$$

En appliquant à α , on obtient $\lambda_1(\alpha - z_0)(\alpha - \bar{z}_0) = 0$, ce qui donne $\lambda_1 = 0$. De même, en considérant les points z_0 et \bar{z}_0 , on obtient $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Étant de cardinal 3 dans un espace de dimension 3 ($\dim \mathbf{C}_2[z] = 3$), c'est une base.

La fonction $f(z) = \frac{-(2z^2 + 4z + 8)}{z^3 + 2z^2 + 4z - 8}$ est une fraction rationnelle dont le dénominateur possède trois racines simples α, z_0, \bar{z}_0 . Comme le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, la décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}(z)$ s'écrit :

$$f(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - z_0} + \frac{C}{z - \bar{z}_0}$$

Puisque f est à coefficients réels, la constante associée à la racine conjuguée \bar{z}_0 est le conjugué de celle associée à z_0 (soit $C = \bar{B}$), et la constante A associée à la racine réelle α est réelle. On obtient bien :

$$f(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - z_0} + \frac{\bar{B}}{z - \bar{z}_0}$$

- (b) La fonction $f(z)$ est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines du dénominateur : $\{\alpha, z_0, \bar{z}_0\}$. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n z^n$ associée à f est égal au module du pôle de plus petit module.

D'après l'étude menée à la question 4c, nous avons démontré que :

$$|z_0| = |\bar{z}_0| > \alpha$$

Le pôle le plus proche de l'origine est donc α . Par conséquent, le rayon de convergence est :

$$R = \alpha$$

- (c) D'après la décomposition en éléments simples établie en 5a, on a :

$$f(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - z_0} + \frac{\bar{B}}{z - \bar{z}_0}$$

Chaque terme de cette décomposition se développe en série entière sur son disque de convergence respectif :

- $\frac{A}{z - \alpha} = -\frac{A}{\alpha} \frac{1}{1 - \frac{z}{\alpha}} = -\frac{A}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n$
- $\frac{B}{z - z_0} = -\frac{B}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$
- $\frac{\bar{B}}{z - \bar{z}_0} = -\frac{\bar{B}}{\bar{z}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\bar{z}_0}\right)^n$

Par unicité du développement en série entière de $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n z^n$, le terme général u_n est :

$$u_n = -\frac{A}{\alpha^{n+1}} - \frac{B}{z_0^{n+1}} - \frac{\bar{B}}{\bar{z}_0^{n+1}}$$

Comme $|z_0| = |\bar{z}_0| > \alpha$ (d'après 4c), on a $\left|\frac{\alpha}{z_0}\right| < 1$. On peut donc factoriser par le premier terme :

$$u_n = -\frac{A}{\alpha^{n+1}} \left(1 + \frac{B}{A} \left(\frac{\alpha}{z_0}\right)^{n+1} + \frac{\bar{B}}{A} \left(\frac{\alpha}{\bar{z}_0}\right)^{n+1}\right)$$

Puisque $\left(\frac{\alpha}{z_0}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\left(\frac{\alpha}{\bar{z}_0}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, le terme entre parenthèses tend vers 1. Ainsi :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{A}{\alpha^{n+1}}$$

6. Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour $n \geq 2$. On cherche M telle que $X_{n+1} = MX_n$. En utilisant les relations de

définition et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{1}{8}u_{n-2}$, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

7. Les valeurs propres λ de la matrice M sont les racines de son polynôme caractéristique $\chi_M(X) = \det(XI_3 - M)$.

Comme M est une matrice compagnon, alors le polynôme caractéristique est :

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{8}$$

L'équation satisfaite par une valeur propre λ est donc $\chi_M(\lambda) = 0$, soit :

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{8} = 0$$

Si l'on pose $z = \frac{1}{\lambda}$ (pour $\lambda \neq 0$), cette équation est équivalente à :

$$\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4z} - \frac{1}{8} = 0 \iff 8 - 4z - 2z^2 - z^3 = 0$$

On retrouve bien le dénominateur de la fonction génératrice $f(z)$ étudié à la question 3b. Les valeurs propres de M sont donc les inverses des racines de l'équation $z^3 + 2z^2 + 4z - 8 = 0$.

Problème 2 :

Question préliminaire : Pour tout $n \geq 1$, on pose $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. L'événement B est défini par $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, de plus la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion ($B_{n+1} \subset B_n$). D'où :

$$p(B) = p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(B_n)$$

D'autre part, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq p(B_n) = p\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} p(A_k)$$

Par hypothèse, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} p(A_k)$ converge. Ainsi, le reste de la série $\sum_{k=n}^{\infty} p(A_k)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(B_n) = 0$$

D'où $p(B) = 0$.

1. (a) Calcul de l'espérance $\phi(t) = E(e^{tX_n})$

D'après l'énoncé, chaque variable aléatoire X_n suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, ce qui signifie que :

$$- P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

$$- P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

Par le théorème de transfert, l'espérance de la variable aléatoire e^{tX_n} se calcule comme suit :

$$E(e^{tX_n}) = \sum_{x \in \{-1, 1\}} e^{tx} P(X_n = x)$$

$$E(e^{tX_n}) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t = \text{ch}(t).$$

(b) On souhaite montrer que $\text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Pour cela considérons la fonction $f(t) = \frac{t^2}{2} - \ln(\text{ch}(t))$.

- f est dérivable sur \mathbf{R} et $f'(t) = t - \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)} = t - \text{th}(t)$.
- On sait que pour tout $t > 0$, $\text{th}(t) < t$, donc $f'(t) > 0$.
- Pour $t < 0$, $f'(t) < 0$.
- $f(0) = 0$.

f admet donc un minimum global en 0 valant 0. Ainsi, $f(t) \geq 0$, ce qui donne $\ln(\text{ch}(t)) \leq \frac{t^2}{2}$. Par croissance de l'exponentielle :

$$\phi(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$$

2. (a) Par définition, la variable aléatoire S_n est la somme des variables aléatoires X_k :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

On a :

$$E(e^{tS_n}) = E\left(e^{t \sum_{k=1}^n X_k}\right) = E\left(\prod_{k=1}^n e^{tX_k}\right)$$

D'après l'énoncé, les variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes, donc les variables $(e^{tX_1}, e^{tX_2}, \dots, e^{tX_n})$ sont également indépendantes. L'espérance d'un produit de variables indépendantes étant le produit de leurs espérances, on obtient :

$$E(e^{tS_n}) = \prod_{k=1}^n E(e^{tX_k})$$

Comme les variables X_k suivent toutes la même loi (loi uniforme sur $\{-1, 1\}$), on a pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $E(e^{tX_k}) = \phi(t)$. D'où le résultat final :

$$E(e^{tS_n}) = (\phi(t))^n = (\text{ch}(t))^n$$

(b) Soit t un réel fixé. D'après la question 2.a, on a l'expression de l'espérance d'une somme de variables indépendantes :

$$E\left(e^{t \frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) = E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}} S_n}\right) = \left[\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

D'après la question 1.a, $\phi(u) = \text{ch}(u)$. Utilisons le développement limité de $\text{ch}(u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 :

$$\text{ch}(u) = 1 + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

En remplaçant u par $\frac{t}{\sqrt{n}}$, on obtient lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On passe à la forme exponentielle pour calculer la limite de la puissance n -ième :

$$\left[\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

En utilisant le développement limité $\ln(1 + v) = v + o(v)$ quand $v \rightarrow 0$:

$$n \ln \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = n \left(\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{t^2}{2} + o(1)$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(e^{t \frac{S_n}{\sqrt{n}}} \right) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

3. (a) Soit a un nombre positif et t un réel. On considère la variable aléatoire e^{tS_n} .

1. **Cas $t > 0$:** Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante, l'événement $\{S_n \geq a\}$ est identique à l'événement $\{e^{tS_n} \geq e^{ta}\}$. En utilisant l'inégalité de **Markov** pour la variable aléatoire positive e^{tS_n} , on obtient :

$$p(e^{tS_n} \geq e^{ta}) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{ta}}$$

Ce qui implique immédiatement :

$$p(S_n \geq a) \leq e^{-ta} E(e^{tS_n})$$

2. **Cas $t \leq 0$:**

- Si $t = 0$, l'inégalité devient $p(S_n \geq a) \leq 1$, ce qui est toujours vrai.
- Si $t < 0$, l'inégalité est valable car le membre de droite devient supérieur à 1.

L'inégalité est donc établie :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad p(S_n \geq a) \leq e^{-ta} E(e^{tS_n})$$

(b) D'après la question 3.a, on a pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$p(S_n \geq a) \leq e^{-ta} E(e^{tS_n})$$

D'après la question 2.a, $E(e^{tS_n}) = (\phi(t))^n$. D'après la question 1.b, $\phi(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$. On obtient donc pour tout $t \geq 0$:

$$p(S_n \geq a) \leq e^{-ta} \left(e^{\frac{t^2}{2}} \right)^n = e^{-ta + \frac{nt^2}{2}}$$

On cherche à minimiser l'exposant $g(t) = \frac{nt^2}{2} - ta$. g est une fonction trinôme du second degré en t . Sa dérivée est $g'(t) = nt - a$. Le minimum est atteint pour $g'(t) = 0$, soit pour :

$$t_0 = \frac{a}{n}$$

Puisque $a \geq 0$ et $n > 0$, on a bien $t_0 \geq 0$. En remplaçant t par $t_0 = \frac{a}{n}$ dans la majoration, on obtient :

$$p(S_n \geq a) \leq \exp \left(-\frac{a}{n} \times a + \frac{n}{2} \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right) = \exp \left(-\frac{a^2}{n} + \frac{a^2}{2n} \right)$$

D'où l'inégalité demandée :

$$p(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

(c) Les variables aléatoires X_k suivent une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, donc $-X_k$ suit également la même loi uniforme. Par conséquent, la somme $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ a la même loi que $-S_n = \sum_{k=1}^n (-X_k)$. On en déduit par symétrie de la loi de S_n par rapport à 0 :

$$p(S_n \leq -a) = p(-S_n \geq a) = p(S_n \geq a)$$

L'événement $\{|S_n| \geq a\}$ est la réunion des deux événements disjoints $\{S_n \geq a\}$ et $\{S_n \leq -a\}$. Par additivité de la probabilité :

$$p(|S_n| \geq a) = p(S_n \geq a) + p(S_n \leq -a)$$

En utilisant la symétrie démontrée ci-dessus :

$$p(|S_n| \geq a) = 2p(S_n \geq a)$$

D'après la question 3.b, on sait que $p(S_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$. D'où la majoration finale pour la valeur absolue :

$$p(|S_n| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

4. (a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. L'événement $\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon$ est équivalent à l'événement $|S_n| \geq n\varepsilon$. En appliquant le résultat de la question 3.c avec $a = n\varepsilon$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = p(|S_n| \geq n\varepsilon) \leq 2e^{-\frac{(n\varepsilon)^2}{2n}} = 2e^{-n\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right)}$$

On sait que la série géométrique de raison $q = e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}}$. Puisque $\varepsilon > 0$, on a $\frac{\varepsilon^2}{2} > 0$, donc $0 < q < 1$. La série géométrique $\sum q^n$ est donc convergente. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} p\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$$

est convergente.

- (b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On considère la suite d'événements $(A_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega \mid \left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| \geq \varepsilon \right\}$$

D'après la question 4.a, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n)$ converge. D'après la **question préliminaire**, si la série des probabilités converge, l'événement, noté Ω_ε , est de probabilité nulle :

$$\Omega_\varepsilon = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

Ainsi, $p(\Omega_\varepsilon) = 0$.

Dire que $\omega \notin \Omega_\varepsilon$ signifie que ω n'appartient qu'à un nombre fini d'événements A_n . Par conséquent, il existe un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, $\omega \notin A_n$. Ceci se traduit par :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| < \varepsilon$$

- (c) Soit $\Omega_0 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_{\frac{1}{k}}$ l'union dénombrable d'ensembles de probabilité nulle (d'après la question 4.b avec $\varepsilon = \frac{1}{k}$). Par la propriété de **sous-additivité dénombrable** d'une probabilité :

$$p(\Omega_0) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} p\left(\Omega_{\frac{1}{k}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$$

Ainsi, Ω_0 est un événement négligeable (de probabilité nulle).

Soit $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\omega \notin \Omega_{\frac{1}{k}}$. D'après la question 4.b, pour tout $\varepsilon = \frac{1}{k}$, il existe un rang $n_{\frac{1}{k}}$ tel que :

$$\forall n \geq n_{\frac{1}{k}}, \quad \left| \frac{S_n(\omega)}{n} \right| < \frac{1}{k}$$

Ceci est la définition même de la limite d'une suite réelle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$$

Conclusion : La convergence vers 0 ayant lieu pour tout ω en dehors d'un ensemble de probabilité nulle ($\Omega \setminus \Omega_0$), on en déduit que :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$$

La suite de variables aléatoires tend vers 0 **presque sûrement**.

5. Soit $\alpha > 1$ fixé. On considère la suite d'événements $(E_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$E_n = \left\{ |S_n| > \alpha \sqrt{2n \ln n} \right\}$$

D'après la question 3.c, on a l'inégalité de concentration :

$$p(|S_n| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

En posant $a = \alpha \sqrt{2n \ln n}$, on obtient :

$$p(E_n) \leq 2 \exp\left(-\frac{\alpha^2(2n \ln n)}{2n}\right) = 2 \exp(-\alpha^2 \ln n)$$

Ce qui se simplifie en :

$$p(E_n) \leq 2n^{-\alpha^2} = \frac{2}{n^{\alpha^2}}$$

Puisque $\alpha > 1$, on a $\alpha^2 > 1$. D'après la règle de **Riemann**, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{\alpha^2}}$ est une série de Riemann convergente. Par comparaison, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p(E_n)$ est donc convergente.

D'après la **question préliminaire**, puisque la série des probabilités converge, l'événement « réalisation d'une infinité de E_n » est de probabilité nulle.

$$p(\text{réalisation d'une infinité de } E_n) = 0$$

Cela signifie que **presque sûrement**, seul un nombre fini de ces événements peuvent se produire.

