Devoir surveillé $n°04$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

Problème 1 :

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t^3+1)^n}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$, donc F_n est croissante sur $[0,+\infty[$. De plus, $\forall t \geq 0$, $\dfrac{1}{(t^3+1)^n} \leq \dfrac{1}{t^{3n}}$, donc pour $x \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n} + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n} && (1)\\
&\leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n} + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^{3n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n} + \frac{1}{3n-1}\left(1-\frac{1}{x^{3n-1}}\right) && (2)\\
&\leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n} + \frac{1}{3n-1}. && (3)
\end{aligned}$$

Ainsi, F_n est une fonction croissante sur $[0,+\infty[$ et majorée, donc elle admet une limite quand x tend vers plus l'infini.

2. Intégrons par parties :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{t'}{'t^3+1)^n}\mathrm{d}t && (4)\\
&= \left[\frac{t}{(t^3+1)^n}\right]_0^{+\infty} + 3n\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(t^3+1)^{n+1}}\mathrm{d}t = 3n(I_n - I_{n+1}) && (5)
\end{aligned}$$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.

3. La fraction $\frac{1}{X^3+1}$ admet -1 comme unique pôle, donc il existe des réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}.$$

• Multipliant par $X+1$ puis posant $X=-1$, $a = \dfrac{1}{3}$.
• Multipliant les deux membres par X puis passant à la limite en $+\infty$, il vient $a+b=0$, d'où $b = -a = \dfrac{-1}{3}$.
• Enfin prenant la valeur en $X=0$ des deux membres : $1 = a+c$, soit $c = \dfrac{2}{3}$.
D'où :

$$\forall t \geq 0,\quad \frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}2t - 2t^2 - t + 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

D'où, pour $x > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} &= \frac{1}{3}\left[\ln(t+1) - \frac{1}{2}\ln(t^2-2t+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x && (6)\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+2t+1}{t^2-2t+1}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x && (7)\\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] && (8)\\
& && (9)
\end{aligned}$$

D'où en passant à la limite $x \to +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

On a donc pour $n \geq 2$:

$$I_n = \frac{(3n-4)(3n-7)...(3n-3(n-1)+1)}{3(n-1)3(n-2)...3(1)} I_1 = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(3n-3k-1)}{3^{n-1}(n-1)!}\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

4. (a) On a $0 \leq L_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^3+1)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3n}} = \frac{1}{3n-1}$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = 0$.

(b) Pour tout $t > 0$, on a $\dfrac{1}{(t^3+1)^n} \leq 1$. D'où en intégrant entre 0 et ε :

$$0 \leq J_n(\varepsilon) \leq \int_0^{\varepsilon} \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

De même sur $\left[\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]$, $0 \leq \dfrac{1}{(t^3+1)^n} \leq \dfrac{1}{\left(\frac{\varepsilon^3}{8}+1\right)^n}$, d'où en intégrant :

$$0 \leq K_n(\varepsilon) \leq \frac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{\left(\frac{\varepsilon^3}{8}+1\right)^n}.$$

(c) Pour $\varepsilon \in]0, 2[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq \dfrac{1-\frac{\varepsilon}{2}}{\left(\frac{\varepsilon^3}{8}+1\right)^n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc pour $n \geq n_0$, $0 \leq J_n(\varepsilon) + K_n(\varepsilon) \leq \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ puisque $I_n = J_n(\varepsilon) + K_n(\varepsilon) + L_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = 0$.

5. (a) L'étude de la fonction $x \mapsto x + \ln(1-x)$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ montre qu'elle strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, 1[$. En particulier elle est majorée par la valeur en 0 qui est nulle. D'où :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad \ln(1-x) \leq -x.$$

(b) Il résulte de la question **3.** que pour tout $n \geq 2$:

$$\ln(I_n) = \ln(I_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{3k-1}{3k}\right) = \ln(I_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{3k}\right).$$

On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$:

$$\ln(I_n) \leq \ln(I_1) - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

(c) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc en intégrant sur $[k-1,k]$ ($k \geq 2$) il vient : $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k-1}$ puis par sommation $H_n - 1 \leq \displaystyle\int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n) \leq H_{n-1}$, ou encore

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

(d) On a $\ln(I_n) \leq \ln(I_1) - \dfrac{1}{3} H_{n-1}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = +\infty$ d'après la question précédente, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(I_n) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\ln(I_n)} = 0$.

6. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} t_n &= \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) && (10)\\ &= \ln\left[\frac{(n+1)^{\frac{1}{3}} I_{n+1}}{n^{\frac{1}{3}} I_n}\right] && (11)\\ &= \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{3n-1}{3n}\right] && (12)\\ &= \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1-\frac{1}{3n}\right)\right] && (13)\\ &= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right). && (14) \end{aligned}$$

Mais au voisinage de 0 $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, d'où :

$$t_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \left(\frac{-1}{3n} - \frac{1}{18n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{2}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(b) On a $t_n + \dfrac{1}{3n^2} = \dfrac{1}{9n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{9n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon_1(n)$ où $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$. Donc pour $\alpha < \dfrac{1}{9}$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1$, implique $|\varepsilon(n)| \leq \alpha$. On a donc $t_n + \dfrac{1}{3n^2} = \dfrac{1}{9n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon(n) \geq \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{9} - \alpha\right) > 0$. D'autre part, $t_n = -\dfrac{2}{9n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{-2}{9n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon_2(n)$ où $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_2(n) = 0$. Donc pour $\alpha < \dfrac{2}{9}$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_2$, implique $|\varepsilon(n)| \leq \alpha$. On a donc $t_n + \dfrac{1}{3n^2} = \dfrac{1}{9n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon(n) \geq \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{2}{9} - \alpha\right) < 0$.

Ainsi, $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a $n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{-1}{3n^2} < t_n < 0$. Par conséquent la suite $(b_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante à partir du rang n_0.

(c) Il résulte de la question précédente $\forall n \geq n_0$, $b_{n+1} - b_n \geq \dfrac{-1}{3n^2}$. On en déduit que

$$b_{n_0+n} > b_{n_0} - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n_0+k)^2}.$$

On sait que la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$ est convergente de somme $\dfrac{\pi^2}{6}$ et donc $b_{n_0+n} \geq b_{n_0} - \dfrac{\pi^2}{18}$, donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

(d) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = e^{b_n}$, or $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^b = l > 0$.
Pour $\varepsilon = \dfrac{l}{3}$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - l| \leq \dfrac{l}{3}$. On a donc pour n entier avec $n \geq n_1$: $a_n \geq l - \dfrac{l}{3} = \dfrac{2l}{3} > \dfrac{l}{2}$. Par conséquent vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt[3]{n} I_n$: pour tout entier n avec $n \geq n_1$, $I_n > \dfrac{1}{2\sqrt[3]{n}}$.

7. (a) La fonction $x \mapsto x^{\frac{-1}{3}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc $\forall x \in [n, n+1]$, $n^{\frac{-1}{3}} \leq x^{\frac{-1}{3}} \leq (n+1)^{\frac{-1}{3}}$. D'où en intégrant :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$$

En remplaçant n par $n-1$ dans l'inégalité à droite, on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}.$$

(b) Par conséquent, en utilisant la relation de Chasles : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{3}{2}\left((n+1)^{\frac{2}{3}} - 1\right) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \sum_{k=1}^{n} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}} = +\infty$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ est donc divergente.

(c) D'après ce qui précède, $n \geq n_1 \Rightarrow I_k \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}$, donc par comparaison, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ est divergente.

Problème 2 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} (n+x) = +\infty$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n}$ et donc $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+^*} \leq \dfrac{1}{n}$. Inégalité qui montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour $x \in]0, +\infty[$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée, dont le terme général en valeur absolue décroit et tend vers 0, donc la série converge absolument sur $]0, +\infty[$.

4. Le signe d'une série alternée est celui de son premier terme et le premier terme est positif, alors $F(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

5. Soit $[a, b]$ un segment de $]0, +\infty[$ ($a < b$), on a :

$$\|f_n\|_\infty^{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \frac{1}{a+n}$$

et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n+a}$ diverge, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur $[a, b]$.

6. D'après le cirière spécial des séries alternées, on a l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \right| \leq \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \|R_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+^*} = 0$, donc la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$, donc d'après le théorème de continuité des fonctions définies par des séries, $F = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur $]0,+\infty[$

8. Chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0,\ f_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. Donc, d'après le théorème de dérivabilité des fonctions définies par des séries, il suffit de de montrer que la série des dérivées $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ est uniformément convergente sur $]0,+\infty[$. En effet, il s'agit d'une série alternée, donc le terme général décroit et tend vers 0,

$$\forall x > 0, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n'(x) \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+2}}{(x+n+1)^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$. Donc on peut conclure que F est classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}.$$

9. Puisque il s'agit d'une série alternée, le signe de $F'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ est celui de $f_0'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$, donc $F'(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

10. Soit $x \in]0,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} F(x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+1+n} && (15)\\ k = n+1 &\underset{=}{} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} && (16)\\ &= -\left(F(x) - \frac{1}{x}\right) && (17) \end{aligned}$$

D'où, $\forall x \in]0,+\infty[$, $F(x+1) + F(x) = \dfrac{1}{x}$.

11. On a déjà $F(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de somme partielles associée à la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$. D'après le théorème des séries alternées, la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et on a :

$$\forall x > 0, \quad S_{2n+1}(x) \leq F(x) \leq S_{2n}(x)$$

En particulier, $S_1(x) \leq F(x) \leq S_0(x)$ ou encore $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} \leq F(x) \leq \dfrac{1}{x}$. D'où :

$$\forall x > 0,\ \ 0 < F(x) \leq \frac{1}{x}.$$

12. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{t+1}$ est bien définie et continue sur $]0,1]$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} t^{1-x}\varphi(t) = 1$. Comme $1 - x < 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge, donc $G(x)$ existe.

13. Pour $x > 0$, on a :

$$FG(x+1) + G(x) = \int_0^1 \frac{t^x + t^{x-1}}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{x-1}(t+1)}{t+1)}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

14. Puisque φ est positive et non nulle, alors $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t > 0$. D'autre part, $\varphi(t) \leq t^{x-1}$ pour tout $t \in]0,1]$, donc $G(x) \leq \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}$. D'où :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ 0 < G(x) \leq \frac{1}{x}.$$

15. Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$H(x+2) = F(x+2) - G(x+2) = \frac{1}{x+1} - F(x+1) - \frac{1}{x+1} + G(x+1) = G(x+1) - F(x+1) = \frac{1}{x} - G(x) - \frac{1}{x} + F(x) =$$

Donc, $\forall x >$, $H(x+2) = H(x)$. De plus, $0 \leq |H(x)| \leq \dfrac{2}{x}$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) = 0$.

16. D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $y > 0$, $y > A$, on a $|H(y)| \leq \varepsilon$. Ainsi, si $x > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + 2n > A$ et donc $|H(x)| = |H(x+2n)| \leq \varepsilon$, donc nécessairement $H(x) = 0$. En conséquence, $F(x) = G(x)$ pour tout $x > 0$. Égalité qui s'écrit aussi,

$$\forall x > 0,\ \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{x+n}\mathrm{d}t.$$

17. D'après la question **11.**, $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} \leq F(x) \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. On en déduit que $1 - \dfrac{x}{x+1} \leq xF(x) \leq 1$ et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} xF(x) = 1$, d'où

$$F(x) \underset{0^+}{=} \frac{1}{x}.$$

18. Puisque F est décroissante sur $]0,+\infty[$, alors pour $x > 1$, on a $F(x+1) \leq F(x) \leq F(x-1)$ et donc $F(x+1) + F(x) \leq 2F(x) \leq F(x-1) + F(x)$.

19. En utilisant la question **10.**, on peut conclure que $\dfrac{1}{x} \leq 2F(x) \leq \dfrac{1}{x-1}$ ou encore $1 \leq 2xF(x) \leq \dfrac{x}{x-1}$. D'où

$$F(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2x}.$$

20. La fonction F est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = +\infty$.

••••••••••